

CHAPITRE 5

Différences finies pour l'équation de Poisson à deux dimensions d'espace

- 1) Discrétisation par différences finies
- 2) Formation du système linéaire
- 3) Résolution du système linéaire

V. DIFFÉRENCES FINIES POUR L'ÉQUATION DE POISSON À DEUX DIMENSIONS D'ESPACE

1) Discrétisation par différences finies

On se propose de résoudre de façon approchée le problème suivant

$$(1) \quad -\Delta u = f \text{ sur } \Omega$$

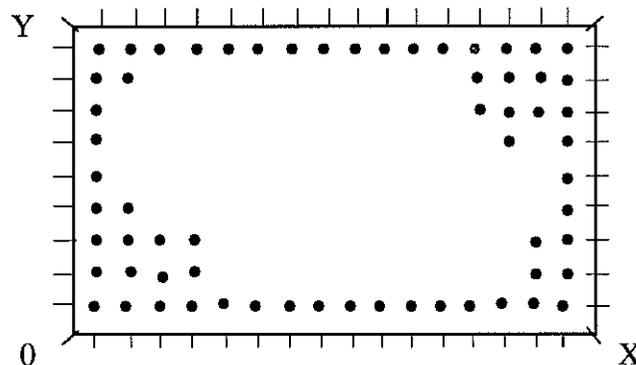
$$(2) \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où Ω est le rectangle $[0, X] \times [0, Y]$. Pour cela, on introduit un pas d'espace en X noté h et un pas en ordonnée k , définis par :

$$(3) \quad h = \frac{X}{n+1}$$

$$(4) \quad k = \frac{Y}{m+1}$$

où n (respectivement m) désigne le nombre de points intérieurs au domaine Ω dans la direction x (respectivement la direction y).



Avant toute définition de schéma numérique, il faut avoir conscience que la variable y ne joue **pas** le rôle d'un temps (et il en est de même pour x en échangeant les rôles de x et y). Plus précisément, les équations d'évolution étudiées aux chapitres précédents, advection et chaleur :

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

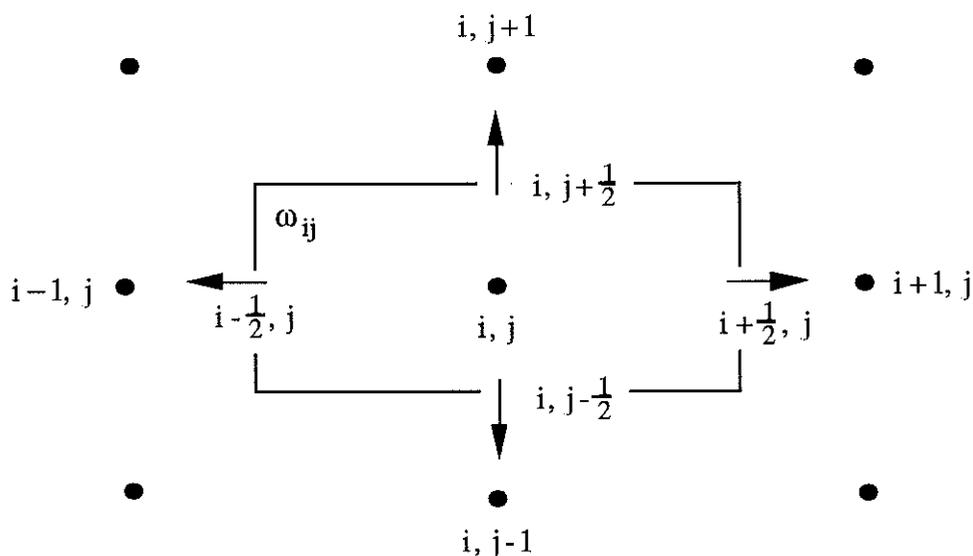
$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

ont été résolues par une méthode numérique mettant en avant le rôle particulier du temps (noté y à dessein dans les équations (5) et (6)). Une condition initiale étant donnée, on calcule **de proche en proche** u aux instants ultérieurs (on balaie pour y fixé à une nouvelle valeur l'ensemble des valeurs de x , ce avec un schéma explicite ou avec un schéma implicite) et on obtient finalement la valeur finale $u(\bullet, Y)$ à l' "instant" Y .

Une telle procédure n'est **pas** possible pour le problème (1) (2). En effet, si on applique le programme précédent avec un hypothétique schéma numérique, il est nécessaire que la valeur finale obtenue $u(\bullet, Y)$ vérifie la condition limite sur le bord $]O, X[\times \{Y\}$ du domaine Ω , c'est-à-dire soit nulle ! On ne peut en pratique imposer une telle contrainte sur un schéma numérique.

Nous devons donc traiter ensemble **tous** les points de discrétisation (i, j) ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) ce qui constitue une difficulté pratique nouvelle sur laquelle nous reviendrons.

La raison profonde concernant le bon choix d'une méthode numérique pour le problème (1) (2) est due à l'analyse mathématique de l'équation de Poisson (2). Sans pouvoir entrer dans les "détails mathématiques" (nous renvoyons par exemple au traité de Courant-Hilbert [1948], ou à la synthèse plus récente de Dautray-Lions [1984]), nous retiendrons ici que l'équation de Poisson est de **type elliptique** (donc doit être résolue par une méthode numérique "globale" qui prend en compte l'ensemble des points de discrétisation), alors que l'équation d'advection (5) est de type **hyperbolique** (rôle particulier donné au temps et vitesse finie de propagation de l'information) et l'équation (6) est de type **parabolique** (rôle particulier pour la variable temporelle, mais vitesse infinie de propagation des informations par l'équation aux dérivées partielles).



Volume de contrôle ω_{ij}

Nous construisons le schéma numérique en cherchant une relation entre les variables discrètes $u_{i,j}$.

$$(7) \quad u_{i,j} \approx u(ih, jk)$$

de façon à approcher la relation (1) à un ordre prêt, calculé par développement de Taylor.

Nous adoptons dans cet exposé (mais on peut procéder autrement) une approche de type "volumes finis" : on intègre l'équation (1) dans le petit volume :

$$\omega_{ij} \equiv](i - \frac{1}{2})h, (i + \frac{1}{2})h[\times](j - \frac{1}{2})k, (j + \frac{1}{2})k[$$

en remarquant que l'on a l'identité suivante :

$$(8) \quad -\Delta u \equiv -\operatorname{div}(\nabla u)$$

qui, jointe à la formule de Green :

$$(9) \quad \int_{\omega} \operatorname{div} \varphi \, dx \, dy = \int_{\partial\omega} \varphi \cdot n \, d\gamma$$

donne la relation :

$$(10) \quad \int_{\omega_{ij}} (-\Delta u) \, dx \, dy = \int_{\partial\omega_{ij}} -\frac{\partial u}{\partial n} \, d\gamma$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée dans la direction de la normale extérieure au bord de ω_{ij} . Le bord de ω_{ij} est composé de quatre segments :

$$(11) \quad \begin{aligned} \partial\omega_{ij} = & \left\{ \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h, jk \right) \right\} \times](j - \frac{1}{2})k, (j + \frac{1}{2})k[\\ & \cup](j - \frac{1}{2})h, (j + \frac{1}{2})h[\times \left\{ \left(ih, \left(j + \frac{1}{2} \right) k \right) \right\} \\ & \cup \left\{ \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h, jk \right) \right\} \times](j - \frac{1}{2})k, (j + \frac{1}{2})k[\\ & \cup \left\{](i - \frac{1}{2})h, \left(i + \frac{1}{2} \right) h[\right\} \times \left\{ \left(ih, \left(j - \frac{1}{2} \right) k \right) \right\} \end{aligned}$$

et la normale extérieure, en suivant l'ordre adopté à la relation (11), est donnée par :

$$(12) \quad \text{directions normales à } \partial\omega_{ij} : \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}$$

La relation (10) est donc approchée en utilisant un point d'intégration par segment composant le bord ω_{ij} :

$$(13) \quad - \int_{\omega_{ij}} \Delta u \, dx \, dy \approx k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \right] + h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \right]$$

Il suffit d'utiliser des différences finies **centrées** pour le calcul approché des gradients aux points intermédiaires :

$$(14) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{h} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + 0(h^2)$$

$$(15) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + 0(k^2)$$

pour obtenir une expression approchée du laplacien sur la grille (h, k).

$$(16) \quad - (\Delta_{h,k} u)_{ij} \approx \frac{1}{|\omega_{ij}|} \int_{\omega_{ij}} (-\Delta u) \, dx \, dy ,$$

sachant que la surface de ω_{ij} vaut $h \times k$, on a donc :

$$(17) \quad - (\Delta_{hk} u)_{ij} \equiv - \frac{1}{h^2} u_{i-1,j} + - \frac{1}{k^2} u_{i,j-1} + 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) u_{i,j} - \frac{1}{k^2} u_{i,j+1} - \frac{1}{h^2} u_{i+1,j}$$

et la version discrétisée par différences finies du problème (1) (2) s'écrit :

$$(18) \quad - (\Delta_{hk} u)_{ij} = f_{ij} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$(19) \quad u_{ij} = 0 \quad i = 0 \text{ ou } n+1, \quad j = 0 \text{ ou } m+1.$$

Dans la relation (18), f_{ij} désigne bien sûr une moyenne de f dans le petit volume ω_{ij} :

$$(20) \quad f_{ij} = \frac{1}{|\omega_{ij}|} \int_{\omega_{ij}} f \, dx \, dy$$

ou bien, ce qui revient à faire une formule de quadrature à un point pour le membre de droite de la relation (20), la valeur ponctuelle au point (ih, jk) :

$$(21) \quad f_{ij} = f(ih, jk).$$

2) Formation du système linéaire

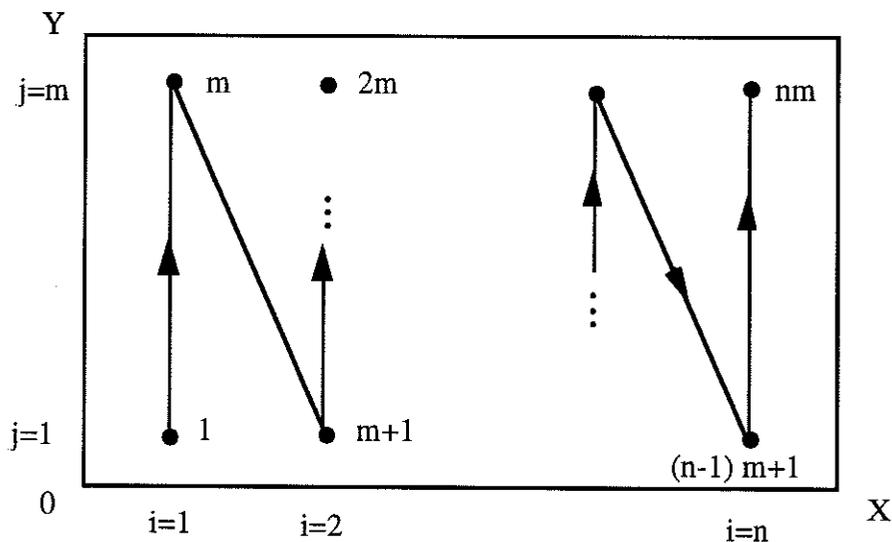
Nous avons, lors de l'étape de discrétisation vue au premier paragraphe, remplacé le problème continu (1) (2) par le problème discret (18) (19) mais nous devons garder à l'esprit que les inconnues de ce problème sont les valeurs ou points de grille $u_{i,j}$ (voir la relation (7)) et qu'on en compte $n \times m$. L'équation (18) est un **ensemble d'équations scalaires linéaires** (il y en a exactement $n \times m$) qu'on peut donc écrire sous une forme matricielle du type :

$$(22) \quad AU = F.$$

La difficulté présente est que le vecteur U n'est pas encore défini et qu'il n'y a pas de façon naturelle de le définir. En effet, U est un vecteur (unicolonne) contenant $n \times m$ éléments alors que la notation "géométrique" u_{ij} indique une matrice rectangulaire paramétrée par les éléments géométriques du problème. Nous devons donc numéroter le double indice (i,j) par un **monoindice** ℓ . Nous choisissons ici (mais de nombreux autres choix sont possibles, il y en a (nm) !) la relation :

$$(23) \quad \ell(i,j) = (i-1)m + j$$

qui revient à numéroter les points du domaine de calcul colonne par colonne, en partant de la colonne la plus à gauche.



Numérotation des sommets proposée à la relation (23)

Le vecteur U_k des inconnues est donc donné par la colonne suivante :

$$(24) \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1m} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{2m} \\ \vdots \\ u_{i1} \\ \vdots \\ u_{im} \\ \vdots \\ u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nm} \end{pmatrix}$$

et nous devons maintenant découvrir la matrice A , d'ordre $nm \times nm$, cachée derrière les relations (17). Il suffit par exemple de remplacer l'indice double ij par le monoindice ℓ proposé à la relation (23). On a donc les correspondances suivantes :

$$(25) \quad (i, j) \longleftrightarrow \ell$$

$$(26) \quad (i, j+1) \longleftrightarrow \ell + 1$$

$$(27) \quad (i, j-1) \longleftrightarrow \ell - 1$$

$$(28) \quad (i+1, j) \longleftrightarrow \ell + m$$

$$(29) \quad (i-1, j) \longleftrightarrow \ell - m$$

et l'équation (18) relative au "point courant" (i, j) donc à l'indice courant ℓ , prend la forme :

$$(30) \quad -(\Delta_{hk} u)_\ell = f_\ell$$

avec :

$$(31) \quad -(\Delta_{hk} u)_\ell \equiv -\frac{1}{h^2} u_{\ell-m} + \\ -\frac{1}{k^2} u_{\ell-1} + 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)u_\ell - \frac{1}{k^2} u_{\ell+1} \\ -\frac{1}{h^2} u_{\ell+m}$$

La matrice A est donc naturellement décomposée en $n \times n$ blocs de taille $m \times m$. De plus seuls les blocs diagonaux ainsi que les blocs directement supérieurs et directement inférieurs aux blocs diagonaux sont non nuls : A est **tridiagonale par blocs**. Comme les coefficients du second membre de la relation (31) ne dépendent pas de ℓ , on a à mettre en évidence **un** bloc diagonal, **un** bloc de la diagonale supérieure et **un** bloc de la diagonale inférieure.

De plus, compte tenu de l'égalité des coefficients de $u_{\ell+m}$ et de $u_{\ell-m}$ dans la relation (31), les deux blocs extradiagonaux sont clairement égaux. La matrice A se décompose donc sous la forme :

$$(32) \quad A = \begin{pmatrix} C & J & 0 & \dots & 0 \\ J & C & & & \\ 0 & & C & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & J \\ 0 & \dots & 0 & J & C \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire sous forme tridiagonale de $n \times n$ blocs, chacun des blocs C et J étant lui-même une matrice $m \times m$. Il résulte alors simplement de la relation (31) qu'on a :

$$(33) \quad J = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$(34) \quad C = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) & -\frac{1}{k^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) & & & \\ 0 & & -\frac{1}{k^2} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{k^2} & 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) \end{pmatrix}$$

La matrice A est **creuse**. Elle a a priori cinq éléments non nuls par ligne (sauf pour les points du bord où il y en a moins), ce qui donne un maximum de 5 nm termes non nuls au lieu de $(nm)^2$ pour une matrice de cet ordre. Cette remarque doit absolument être prise en compte lors de l'utilisation pratique de A sur un ordinateur (la résolution numérique du système (22)) sous peine de saturer très vite la mémoire et les capacités de calcul des plus gros ordinateurs du moment, avec une programmation ne prenant pas en compte les spécificités du problème posé. Nous avons aussi :

Proposition

La matrice A définie en (32) (33) (34) est symétrique, définie positive.

La symétrie est claire ; nous admettons le caractère défini positif qui apparaîtra à nouveau plus clairement, lors de la méthode des éléments finis. Toutefois, la proposition précédente fournit "naturellement" une méthode de résolution numérique, l'algorithme du gradient conjugué.

3) Résolution du système linéaire par la méthode du gradient conjugué.

Proposé sous forme d'exercice au chapitre 9.