

Schéma D1Q3 — Conditions aux limites

Dans tout ce TP, on considère un schéma D1Q3 de pas d'espace dx et de pas de temps $dt = dx/c$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ qui permet de simuler l'équation de l'acoustique

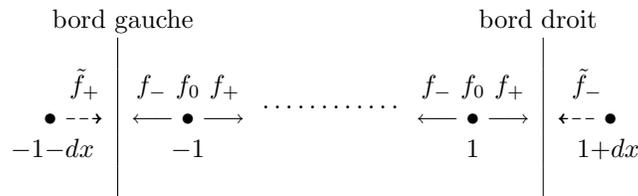
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x (2E^{eq}) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où l'on prendra

$$E^{eq} = \alpha^2 \frac{c^2}{2} \rho, \quad (2)$$

avec α une constante strictement positive. On s'intéressera à tester différentes conditions aux limites.

Prenons par exemple, le bord droit en $x = 1$. Durant l'étape de transport libre, nous avons besoin d'une information sur la valeur de $f_-(t, 1+dx)$ (ou bien $f_-^*(t, 1+dx)$ après relaxation), valeur que nous noterons \tilde{f}_- . Nous noterons également \tilde{f}_+ la valeur de $f_+(t, -1-dx)$ nécessaire pour le bord gauche.



Question 1. (conditions périodiques)

Montrer qu'en prenant $\tilde{f}_+ = f_+(1)$ et $\tilde{f}_- = f_-(-1)$, on obtient des conditions de type périodique. En particulier, montrer que la solution obtenue est $2 + dx$ périodique. Il faudra donc penser à supprimer un point du domaine pour obtenir des domaines de taille entière.

Question 2. (condition *bounce back*)

Montrer qu'en prenant $\tilde{f}_+ = f_-(-1)$ et $\tilde{f}_- = f_+(1)$, on obtient des conditions de type rebond. Préciser cette condition aux limites sur les quantités macroscopiques.

Question 3. (condition *anti bounce back*)

Montrer qu'en prenant $\tilde{f}_+ = -f_-(-1)$ et $\tilde{f}_- = -f_+(1)$, on obtient des conditions de type anti-rebond. Préciser cette condition aux limites sur les quantités macroscopiques.

Question 4.

Implémenter ces trois types de condition aux limites pour le schéma D1Q3 et les tester. On pourra prendre pour les tests une condition initiale de type gaussienne qui se propage vers la droite et attendre suffisamment longtemps pour voir l'impact de plusieurs bords.

Question 5.

Déterminer des cas tests pour lesquels vous avez des solutions exactes au système (1). Comparer les solutions obtenues avec la solution exacte.