le cnam

Introduction aux schémas de Boltzmann sur réseau

Paris, 2012 - 2013

Cours 02

Conditions limites de rebond et d'anti-rebond pour le schéma D1Q3 en acoustique

François Dubois

novembre 2012, 5 pages

CNAM-CSI-2012

Conditions limites de rebond et d'antirebond pour le schéma DIQ3 en acoustique.

- Le schéma DIQ3 utilise trois densités de particules f_+, f_0, f_- qui évoluent dans le temps (t passe de $n\Delta t$ à $(n+1)\Delta t$) en un point $j\Delta x$ de la grille :

(1) $$(f_+)_j^{n+1} = (f_+^*)_{j-1}^n$$

(2) $$(f_0)_j^{n+1} = (f_0^*)_j^n$$

(3) $$(f_-)_j^{n+1} = (f_-^*)_{j+1}^n .$$

- Sur un bord "à gauche" de la grille ($j=1$), la relation (1) n'a pas de sens car le point $j=0$ n'existe pas. De même en $j = j_{max}$ pour un bord "à droite" pour la relation (3) car il n'y a pas de point de numéro $j > j_{max}$.

- Pour une condition limite de rebond, on a typiquement

(4) $$(f_+)_1^{n+1} = (f_-^*)_1^n , \quad j=1 .$$

Les particules sortantes en $j=1$ rebondissent sur la paroi et sont renvoyées vers l'intérieur du domaine de calcul. De façon analogue pour le bord droit

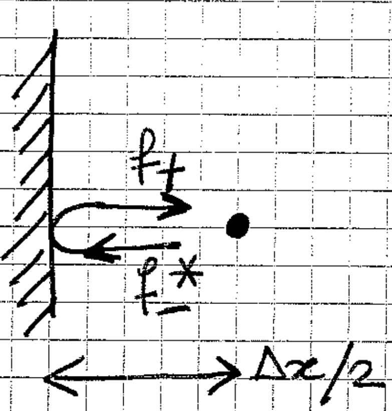

Figure 1

(5) $$\left(f_-\right)_{j_{max}}^{n+1} = \left(f_+^*\right)_{j_{max}}^{n} \quad , j = j_{max}$$

- Quelle analyse peut-on faire de la condition limite (4) (ou (5)) ? On note δ_1^R l'expression qui est nulle si la relation (4) est satisfaite :

(6) $$\delta_1^R \equiv \left(f_+\right)_1^{n+1} - \left(f_-^*\right)_1^{n} .$$

On rappelle aussi qu'à l'équilibre, on a

(7) $$f_+^{eq} = \frac{J}{2\lambda} + \frac{\varepsilon^{eq}}{\lambda^2} \, , \; f_-^{eq} = -\frac{J}{2\lambda} + \frac{\varepsilon^{eq}}{\lambda^2} .$$

Quand on développe f et f^* en fonction de Δx (ou Δt), on a vu que tous les champs sont à l'équilibre (à l'ordre 0). On en déduit

$$\delta_1^R = f_+^{eq} - f_-^{eq} \quad \text{en } j=1$$

(8) $$\delta_1^R = \frac{J}{\lambda} + O(\Delta) \quad \text{en } j=1$$

Annuler δ_1^R revient à se donner l'impulsion J égale à 0 sur le bord, c'est à dire à annuler la vitesse. Bien entendu, on a le même résultat pour $j = j_{max}$.

- Une condition d'antirebond s'écrit typiquement

(9) $$(f_+)_1^{n+1} = -(f_-^*)_1^n + g_1^{n+1/2} \quad , \; j = 1$$

(10) $$(f_-)_{j_{max}}^{n+1} = -(f_+)_{j_{max}}^n + g_{j_{max}}^{n+1/2} \quad , \; j = j_{max} .$$

On note δ_1^A la grandeur imposée lors d'une condition d'antirebond

(11) $$\delta_1^A \equiv (f_+)_1^{n+1} + (f_-^*)_1^n .$$

Comme dans le cas du rebond, les densités de particules sont proches de l'équilibre (donné en (7)). Donc

$$\delta_1^A = f_+^{eq} + f_-^{eq} + O(\Delta)$$

(12) $$\delta_1^A = \frac{2}{\lambda^2} \varepsilon^{eq} + O(\Delta) \quad \text{en } j = 1 .$$

Comme on a $\varepsilon^{eq} \equiv \frac{\lambda^2}{2} \alpha \rho$, il est naturel de choisir

(13) $$g_1^{n+1/2} = \alpha \, \rho_{bord}^{n+1/2}$$

pour exprimer qu'on se donne la densité sur le bord. Attention, la source $g_j^{n+1/2}$ fait également intervenir le paramètre α qui règle les valeurs à l'équilibre du schéma. Nous retenons qu'une condition limite d'antirebond telle que (9) ou (10) permet d'imposer la <u>densité</u> (ou la pression) pour le schéma de Boltzmann D1Q3 en acoustique.

5 décembre 2012

Dubois.