

le **cnam**

**Introduction aux schémas
de Boltzmann sur réseau**

Paris, 2012 - 2013

Cours 04

**Mise en œuvre du schéma D2Q9
pour la mécanique des fluides**

François Dubois
janvier 2013, 8 pages

Mise au œuvre du schéma D2Q9 pour la mécanique des fluides.

- Le réseau de référence est constitué de nœuds x_{kl} paramétrés par deux entiers, nœuds situés sur une grille de pas Δx :

$$(1) \quad \begin{cases} x_{k+1,l} = x_{k,l} + (\Delta x, 0) \\ x_{k,l+1} = x_{k,l} + (0, \Delta x) \end{cases}$$

- Une fois Δx fixé (un niveau de discrétisation ordonné), le pas de temps Δt est supposé lui être proportionnel. Ceci introduit naturellement une échelle de vitesse λ :

$$(2) \quad \lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Fixer $\lambda = 1$ dans l'outil de simulation revient à mesurer les vitesses relativement à cette échelle λ .

- Une inconnue fondamentale est la densité $f_j(x, t)$ des particules de vitesse v_j , au point $x = x_{kl}$ et au temps $t = n \Delta t$ ($n \in \mathbb{N}$).

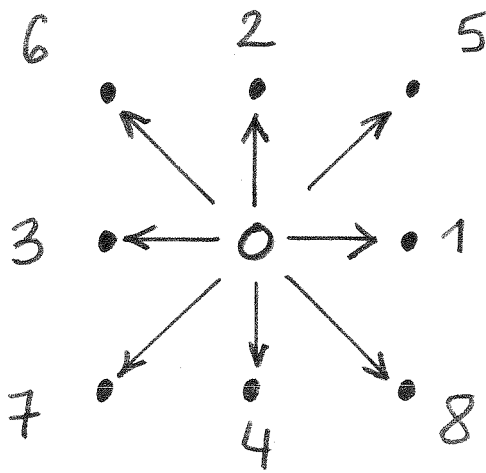


Figure 1 Numérotation des nœuds voisins d'un sommet x et représentation des vitesses $(v_j)_{0 \leq j \leq 8}$ associées au schéma D2Q9.

Pour le schéma D2Q9, les vitesses v_j permettent de pointer vers x lui-même ($j=0$) et vers les 8 plus proches voisins du réseau carré (Fig.1) :

$$(3) \begin{array}{c|cccccccc} \begin{array}{l} -f_x \\ v_x \\ -f_y \\ v_y \\ f \end{array} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & 0 & \lambda & 0 & -\lambda & 0 & \lambda & -\lambda & -\lambda & \lambda \\ & 0 & 0 & \lambda & 0 & -\lambda & \lambda & \lambda & -\lambda & \lambda \end{array}$$

- A partir des f_j , on fabrique des moments $(m_k)_{0 \leq k \leq 9}$ par combinaison linéaire :

$$(4) \quad m_k = \sum_{j=0}^8 M_{kj} f_j, \quad 0 \leq k \leq 8.$$

La matrice M qui lie les distributions f aux moments M est donnée classiquement par

$$(5) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda & 0 & \lambda & -\lambda & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -\lambda & \lambda & \lambda & -\lambda & -\lambda \\ -4\lambda^2 & -\lambda^2 & -\lambda^2 & -\lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & 2\lambda^2 & 2\lambda^2 & 2\lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & -\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \\ 0 & -2\lambda^3 & 0 & 2\lambda^3 & 0 & \lambda^3 & -\lambda^3 & -\lambda^3 & \lambda^3 \\ 0 & 0 & -2\lambda^3 & 0 & 2\lambda^3 & \lambda^3 & \lambda^3 & -\lambda^3 & -\lambda^3 \\ 4\lambda^4 & -2\lambda^4 & -2\lambda^4 & -2\lambda^4 & -2\lambda^4 & \lambda^4 & \lambda^4 & \lambda^4 & \lambda^4 \end{pmatrix}$$

cette matrice est construite pour que ses lignes soient deux à deux orthogonales

$$(6) \sum_j M_{kj} M_{lj} = 0 \text{ si } k \neq l.$$

De plus, les différents moments sont personnalisés. Les trois premiers $W = (\rho, j_x, j_y)^t$ conviennent aux variables conservées pour le cas d'un fluide

$$(7) \rho = \sum_j f_j \cdot j_x = \sum_j v_j^x f_j \cdot j_y = \sum_j v_j^y f_j$$

les trois suivants sont des moments de degré 2 en vitesse pour la distribution f_j :

$$(8) \begin{cases} E = 3 \sum_j |v_j|^2 f_j + \text{terme d'orthogonalisation} \equiv m_3 \\ XX = \sum_j [(v_j^x)^2 - (v_j^y)^2] f_j \equiv m_4 \\ XY = \sum_j v_j^x v_j^y f_j \equiv m_5 \end{cases}$$

Les deux suivants sont des moments d'ordre 3 du champ de vitesse qui, ensemble, permettent de construire un vecteur lié au flux de chaleur

$$(9) \begin{cases} q_x = 3 \sum_j |v_j|^2 v_j^x f_j + \text{orthogonalisation} \equiv m_6 \\ q_y = 3 \sum_j |v_j|^2 v_j^y f_j + \text{orthogonalisation} \equiv m_7 \end{cases}$$

Le dernier moment m_8 est associé au "carré de l'énergie":

$$(10) \quad e_2 = \frac{9}{2} \sum_j |v_j|^4 f_j + \text{orthogonalisation} \equiv m_8 .$$

- Une fois les moments $m_k(x,t)$ déterminés en chaque point $x = x_{kl}$ du réseau et à l'instant t , on calcule la valeur d'équilibre suivantement:

$$(11) \quad \rho^{eq} = \rho, \quad j_x^{eq} = j_x, \quad j_y^{eq} = j_y$$

$$(12) \begin{cases} \varepsilon^{eq} = -2\lambda^2 \rho, \quad \chi_x^{eq} = 0, \quad \chi_y^{eq} = 0 \\ q_x^{eq} = -\lambda^2 j_x, \quad q_y^{eq} = -\lambda^2 j_y, \quad e_2^{eq} = \lambda^4 \rho . \end{cases}$$

Dans le cas où on s'intéresse à un fluide non linéaire (équations de Navier-Stokes), les relations (12) doivent être modifiées comme suit:

$$(13) \begin{cases} \varepsilon^{eq} = -2\lambda^2 \rho + 3 \frac{|j|^2}{\rho} \\ xX^{eq} = \frac{1}{\rho} (j_x^2 - j_y^2), \quad xY^{eq} = \frac{1}{\rho} j_x j_y \\ q_x^{eq} = -\lambda^2 j_x, \quad q_y^{eq} = -\lambda^2 j_y \\ e_2^{eq} = \lambda^4 \rho - 3\lambda^2 \frac{|j|^2}{\rho} \end{cases}$$

En pratique, on néglige souvent la dépendance en ρ pour les termes non linéaires des moments d'ordre supérieur et on utilise les relations

$$(14) \begin{cases} \varepsilon^{eq} = -2\lambda^2 \rho + 3|j|^2, \quad xX^{eq} = (j_x^2 - j_y^2), \quad xY^{eq} = j_x j_y \\ q_x^{eq} = -\lambda^2 j_x, \quad q_y^{eq} = -\lambda^2 j_y, \quad e_2^{eq} = \lambda^4 \rho - 3\lambda^2 |j|^2 \end{cases}$$

- l'étape de relaxation $m_k \rightarrow m_k^*$ des moments hors équilibre ($k \geq 3$) en diagonale :

$$(15) \quad m_k^* = m_k + \alpha_k (m_k^{eq} - m_k), \quad k \geq 3.$$

Les coefficients α_k doivent être compatibles avec la stabilité du schéma d'Euler explicite :

$$(16) \quad 0 < \alpha_k < 2, \quad k \geq 3.$$

On les choisit aussi de façon à respecter certaines symétries :

$$(17) \quad s_3 = s_e; \quad s_4 = s_5 = s_x; \quad s_6 = s_7 = s_9, \quad s_8 = s_{e2}.$$

- La distribution $f_k^*(x, t)$ après relaxation est une inversion de la relation (4), mais entre quantités "post-équilibre":

$$(18) \quad f_j^* = \sum_k M_{jk}^{-1} \cdot m_k^*, \quad 0 \leq j \leq 8.$$

- La phase de transport s'écrit en toute généralité

$$(19) \quad f_j(x, t + \Delta t) = f_j^*(x - v_j \cdot \Delta t, t), \quad 0 \leq j \leq 8.$$

Comme les vitesses v_j pointent vers les voisins, les relations (19) se décomposent facilement sur la grille (x_{kl}) , k, l entiers :

$$(20) \quad \left[\begin{array}{l} \text{débaut} \\ f_0(x_{kl}, t + \Delta t) = f_0^*(x_{kl}, t) \\ f_1(x_{k,l}, t + \Delta t) = f_1^*(x_{k-1,l}, t) \\ f_2(x_{k,l}, t + \Delta t) = f_2^*(x_{k,l-1}, t) \\ f_3(x_{k,l}, t + \Delta t) = f_3^*(x_{k+1,l}, t) \\ f_4(x_{kl}, t + \Delta t) = f_4^*(x_{k,l+1}, t) \\ f_5(x_{kl}, t + \Delta t) = f_5^*(x_{k-1,l-1}, t) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 (20) \\
 [fin]
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 f_6(x_{kl}, t+\Delta t) = f_6^*(x_{k+1, l-1}, t) \\
 f_7(x_{kl}, t+\Delta t) = f_7^*(x_{k+1, l+1}, t) \\
 f_8(x_{kl}, t+\Delta t) = f_8^*(x_{k-1, l+1}, t) .
 \end{array} \right.$$

ou se reportera à la figure 1 pour passer de (19) à (20).

- Afin de travailler sur une grille de taille finie, on peut imposer très simplement une vitesse nulle $\vec{f} = 0$ via une condition de rebond. Pour une frontière "gauche" de type " $i=1$ ", les vitesses numérotées 1, 5, 8 sont entrantes. on ne dispose donc pas de noeud de la forme $x_{k-1, l}$. on propose classiquement

$$(21) \left\{ \begin{array}{l}
 f_1(x, t+\Delta t) = f_3^*(x, t) \\
 f_5(x, t+\Delta t) = f_7^*(x, t) \\
 f_8(x, t+\Delta t) = f_6^*(x, t) .
 \end{array} \right.$$

Pour les autres frontières, les relations (20) doivent être adaptées. Un exercice laissé au lecteur...

Jubois

Paris, 24 janvier 2013.