le cnam

Introduction aux schémas de Boltzmann sur réseau

Paris, 2012 - 2013

Cours 05

Analyse au premier ordre du schéma D2Q9 pour le fluide

François Dubois

janvier 2013, 7 pages

CSI
janvier 2013

Analyse au premier ordre du schéma D2Q9 pour le fluide

F. Dubois,
30 janvier 2013.

- L'algorithme du schéma de Boltzmann sur réseau s'écrit classiquement

(1) $\quad f_j(x, t+\Delta t) = f_j^*(x - v_j \Delta t, t) \,, \quad 0 \leq j \leq q-1 \,,$

où x est un point du réseau et v_j une vitesse discrète telle que $v_j \Delta t$ lie deux points du réseau. La distribution f_j^* après relaxation s'obtient avec la matrice M (fixée, inversible) de sorte que

(2) $\quad f_j^* = \sum_\ell (M^{-1})_{j\ell} \, m_\ell^* \,, \quad 0 \leq j \leq q-1 .$

- Le moment m_ℓ^* après équilibre et relaxation se calcule à partir des f_j par un algorithme qui découple les points x du réseau. Les $(d+1)$ [à d dimensions ; $d = 2$ pour le schéma D2Q9] premiers moments sont conservés :

(3) $\quad \rho \equiv \sum_{j=0}^{q-1} f_j \,, \quad J_\alpha = \sum_{j=0}^{q-1} v_j^\alpha f_j \,, \quad 1 \leq \alpha \leq d$

et forment les premières composantes du vecteur m :

(4) $\quad m_0 = \rho \,, \quad m_\alpha = J_\alpha \,, \quad \alpha = 1, \dots, d \quad .$

On a donc $M_{1j} \equiv 1$ et $M_{\alpha j} \equiv v_j^\alpha$ pour $0 \leq j \leq q-1$.

Les autres moments $(m_k)_{k>d}$ sont aussi combinaison linéaire des f_j :

(5) $$m_k = \sum_{j=0}^{q-1} M_{kj} f_j , \quad 0 \leq k \leq q-1 .$$

Les moments à l'équilibre sont une fonction donnée (a priori non linéaire) des moments conservés W :

(6) $$W = (\rho, J_1, \ldots, J_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

(7) $$m_k^{eq} = G_k(W) , \quad k>d .$$

Après relaxation, on a simplement

(8) $$m_k^{*} = m_k + s_k (m_k^{eq} - m_k), \quad k>d,$$

avec $0 < s_k < 2$.

- On suppose pour cette analyse que pour $\Delta t \to 0$, l'ensemble des résultats des calculs discrets peut être décrit par une fonction f régulière de sorte que la relation (1) est satisfaite. On fait d'abord une analyse à l'ordre 0. On utilise (1)(2) et (5) ; il vient

$$m_k(x, t+\Delta t) = \sum_j M_{kj} f_j(x, t+\Delta t)$$

$$= \sum_j M_{kj} f_j^{*}(x - v_j \Delta t, t) = \sum_{j,l} M_{kj} M_{jl}^{-1} m_l^{*}(x - v_j \Delta t, t)$$

(9) $m_k(x, t+\Delta t) = \sum_{j,\ell} M_{kj} \, M^{-1}_{j\ell} \, m^*_\ell(x - v_j \Delta t, t)$

- On développe la relation (9) au premier ordre en temps, i.e avec un reste d'ordre 1. Il vient :

$$m_k(x,t) + O(\Delta) = \sum_{j,\ell} M_{kj} \, M^{-1}_{j\ell} \left(m^*_\ell(x) + O(\Delta) \right)$$

$$= \sum_\ell \delta_{k\ell} \, m^*_\ell(x) + O(\Delta) = m^*_k(x) + O(\Delta)$$

(10) $m_k = m^*_k + O(\Delta)$.

Si $k > d$, on a également la relation (8), d'où $s_k (m^{eq}_k - m_k) = O(\Delta)$ pour $k > d$.
D'où

(11) $m_k = m^{eq}_k + O(\Delta)$, $m^*_k = m^{eq}_k + O(\Delta)$, $k > d$.

A l'ordre zéro, la distribution des moments est à l'équilibre, donc la distribution de particules f_j est à l'équilibre aussi.

- A l'ordre suivant, on développe (9) en poussant la formule de Taylor un cran plus loin :

$$m_k + \Delta t \, \partial_t m_k + O(\Delta^2) = m^*_k - \sum_{j,\ell} \Delta t \, M_{kj} \, M^{-1}_{j\ell} \, v^\alpha_j \, \partial_\alpha m^*_\ell + O(\Delta^2)$$

Comme $v^\alpha_j = M_{\alpha j}$ pour $1 \leq \alpha \leq d$, on définit le tenseur Λ des moments - vitesses par

(12) $\Lambda^\ell_{k\alpha} = \sum_j M_{kj} \, M_{\alpha j} \, M^{-1}_{j\ell}$, $0 \leq k, \ell \leq q-1$, $1 \leq \alpha \leq d$.

on suppose (hypothèse non triviale !) que les relations (11) sont encore vraies par dérivation :

(13) $\partial_t m_k = \partial_t m_k^{eq} + O(\Delta)$, $\partial_\alpha m_k^{*} = \partial_\alpha m_k^{eq} + O(\Delta)$.

D'où

(14) $m_k^{*} - m_k = \Delta t \left[\partial_t m_k^{eq} + \Lambda_{k\alpha}^{\ell} \, \partial_\alpha m_\ell^{eq} \right] + O(\Delta^2)$

- On prend $k=0$ dans la relation (14). Comme $\rho^{*} = \rho$ et $\Lambda_{0\alpha}^{\ell} = \sum_j M_{0j} M_{\alpha j} M^{-1}_{j\ell} = \sum_j \Pi_{\alpha j} \Pi^{-1}_{j\ell}$ car $\Pi_{0j} \equiv 1$.

(15) $\Lambda_{0\alpha}^{\ell} = \delta_{\alpha\ell}$

D'où

$\partial_t \rho + \sum_\ell \delta_{\alpha\ell} \, \partial_\alpha m_\ell^{eq} = \partial_t \rho + \partial_\alpha J_\alpha = O(\Delta)$

(16) $\partial_t \rho + \partial_\alpha J_\alpha = O(\Delta)$

on a la conservation de la masse à l'ordre 1.

- On fait ensuite $k=\alpha$ $(1 \leq \alpha \leq d)$ dans la relation (14). On a encore $m_\alpha^{*} = J_\alpha^{*} = J_\alpha = m_\alpha$ donc le membre de gauche de (14) est nul. On en déduit

(17) $\partial_t J_\alpha + \sum_{\beta,\ell} \Lambda_{\alpha\beta}^{\ell} \, \partial_\beta m_\ell^{eq} = O(\Delta)$, $1 \leq \alpha \leq d$.

- Nous précisons maintenant ce que la conservation de l'impulsion (17) exprime dans le cas du schéma D2Q9. A partir de la matrice M introduite dans une leçon précédente [avec $m_3 = \varepsilon$, $m_4 = XX$, $m_5 = XY$, $m_6 = q_x$, $m_7 = q_y$, $m_8 = e_2$], le calcul de $\Lambda^{\ell}_{\alpha\beta}$ défini par (12) peut être explicité :

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Λ^{ℓ}_{11}	$\frac{2}{3}\lambda^2$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$\Lambda^{\ell}_{12} = \Lambda^{\ell}_{21}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Λ^{ℓ}_{22}	$\frac{2}{3}\lambda^2$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0

D'où une forme plus développée de (17) :

$$(18) \left\{ \begin{aligned} & \partial_t J_x + \partial_x \left[\frac{2}{3}\lambda^2 \rho + \frac{1}{6} \varepsilon^{eq} + \frac{1}{2} XX^{eq} \right] + \partial_y XY^{eq} = O(\Delta) \\ & \partial_t J_y + \partial_x XY^{eq} + \partial_y \left[\frac{2}{3}\lambda^2 \rho + \frac{1}{6} \varepsilon^{eq} - \frac{1}{2} XX^{eq} \right] = O(\Delta) \end{aligned} \right.$$

- Il suffit de rappeler l'explicitation des tenseurs d'ordre 2 à l'équilibre pour écrire la loi de conservation à l'ordre 1 :

$$(19) \left\{ \begin{aligned} & \varepsilon^{eq} = -2\lambda^2 \rho + \frac{3}{\rho} |J|^2 \\ & XX^{eq} = \frac{1}{\rho} (j_x^2 - j_y^2) \\ & XY^{eq} = \frac{1}{\rho} J_x J_y \end{aligned} \right.$$

Après un calcul élémentaire, les relations (18)(19) s'écrivent

$$(20) \begin{cases} \partial_t J_x + \frac{\lambda^2}{3}\partial_x \rho + \partial_x\left(\frac{J_x^2}{\rho}\right) + \partial_y\left(\frac{J_x J_y}{\rho}\right) = O(\Delta) \\ \partial_t J_y + \frac{\lambda^2}{3}\partial_y \rho + \partial_x\left(\frac{J_x J_y}{\rho}\right) + \partial_y\left(\frac{J_y^2}{\rho}\right) = O(\Delta) \end{cases} .$$

- On reconnait les équations de l'impulsion de la dynamique des gaz, avec une pression $p(\rho)$ donnée par

$$(21) \qquad p(\rho) = \frac{\lambda^2}{3}\rho .$$

On reconnait une loi de pression acoustique, avec

$$(22) \qquad c_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} .$$

La Rochelle,
30 janvier 2013

Dubois.