

le **cnam**

**Introduction aux schémas  
de Boltzmann sur réseau**

Paris, 2012 - 2013

**Cours 06**

**Mise en oeuvre du schéma D2Q9  
pour le problème de Poiseuille  
et analyse au second ordre**

François Dubois  
février 2013, 10 pages

Mise en œuvre du schéma D2Q9 pour le problème de Poiseuille et analyse au second ordre.

F. Dubois, 2 février 2013

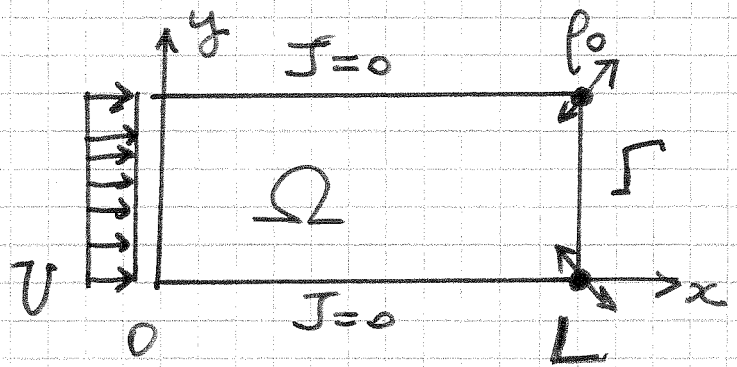


Figure 1

- Pour approcher un flot parabolique de Poiseuille du type

$$(1) \quad \vec{u}(y) = (V y(Y-y), 0), \quad 0 \leq y \leq Y,$$

on se donne une géométrie rectangulaire (Figure 1) avec les conditions limites suivantes:

$$(2) \quad \vec{J} = 0 \quad \text{pour } y=0 \text{ et } y=Y$$

$$(3) \quad \vec{J} = (\rho_0 V, 0) \quad \text{dans l'entrée } x=0$$

$$(4) \quad \text{une sortie libre sur } \Gamma \text{ en } x=L.$$

De plus, on fixe la densité  $\rho_0$  en deux points de la sortie (voir la figure 1).

- Pour fixer la vitesse nulle (relation (2)), une condition de rebond homogène suffit. Nous l'avons déjà traité par ailleurs.

- Pour la donnée d'entrée (3), on a besoin de connaître les valeurs d'équilibre linéarisées du schéma D2Q9. On a classiquement (avec la numérotation usuelle de 0 à 8):

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} f_0^{eq} = \frac{4}{9} \rho \\ f_1^{eq} = \frac{1}{9} \rho + \frac{1}{3\lambda} J_x ; f_3^{eq} = \frac{1}{9} \rho - \frac{1}{3\lambda} J_x \\ f_2^{eq} = \frac{1}{9} \rho + \frac{1}{3\lambda} J_y ; f_4^{eq} = \frac{1}{9} \rho - \frac{1}{3\lambda} J_y \\ f_5^{eq} = \frac{1}{36} \rho + \frac{1}{12\lambda} (J_x + J_y) ; f_7^{eq} = \frac{1}{36} \rho - \frac{1}{12\lambda} (J_x + J_y) \\ f_6^{eq} = \frac{1}{36} \rho - \frac{1}{12\lambda} (J_x - J_y) ; f_8^{eq} = \frac{1}{36} \rho + \frac{1}{12\lambda} (J_x - J_y) \end{array} \right.$$

des flux d'entrée (eux=0)  $f_1$ ,  $f_5$  et  $f_8$  vérifient donc les relations

$$f_1(t+\Delta t) - f_3^*(t) = f_1^{eq} - f_3^{eq} + O(\Delta t) = \frac{2}{3\lambda} J_x + O(\Delta t)$$

$$f_5(t+\Delta t) - f_7^*(t) = f_5^{eq} - f_7^{eq} + O(\Delta t) = \frac{1}{6\lambda} (J_x + J_y) + O(\Delta t)$$

$$f_8(t+\Delta t) - f_6^*(t) = f_8^{eq} - f_6^{eq} + O(\Delta t) = \frac{1}{6\lambda} (J_x - J_y) + O(\Delta t)$$

On en déduit les conditions d'ordre 1 de retard non homogène pour imposer la relation (3):

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} f_1(t+\Delta t) = f_3^*(t) + \frac{2}{3\lambda} \rho_0 U \\ f_5(t+\Delta t) = f_7^*(t) + \frac{1}{6\lambda} \rho_0 U \\ f_8(t+\Delta t) = f_6^*(t) + \frac{1}{6\lambda} \rho_0 U \end{array} \right.$$

- La sortie libre ( $x=L, i=N_x$ ) s'obtient à l'aide d'une approche spécifique. Le schéma décentré ouant "courant" 3

$$(7) \quad f_j(x, t+\Delta t) = f_j^*(x - v_j \Delta t, t), \quad 0 \leq j \leq 8$$

peut être utilisé même pour la dernière couche pour les densités de particules sortantes c'est à dire  $j=1, 5, 8$ . Pour les autres densités de particules, on duplique ce que l'algorithme courant (7) a permis de calculer sur la couche de maille  $i=N_x-1$  située directement à gauche. En termes algébriques,

$$(8) \quad f_k(x, t+\Delta t) = f_k(x - \Delta x, t+\Delta t), \quad k \neq 1, 5, 8.$$

- on fixe la densité pour les deux points  $x$  "en haut à droite" et "en bas à droite" de la figure 1, c'est à dire pour  $i=N_x, j=1$  ou  $N_y$ . on utilise un anti-rebond sur les directions diagonales.

Pour  $i=N_x, j=1$ , on a

$$f_{16}(t+\Delta t) + f_8^*(t) = f_{16}^{eq} + f_8^{eq} + O(\Delta) = \frac{\rho}{18} + O(\Delta).$$

D'où un anti-rebond non homogène pour ce point:

$$(9) \quad f_{16}(t+\Delta t) = -f_8^*(t) + \frac{\rho}{18}, \quad i=N_x, j=1.$$

Pour  $i = N_x, j = N_y$ , on a

$$f_7(t+\Delta t) + f_5^*(t) = f_7^{eq} + f_5^{eq} + O(\Delta) = \frac{e}{18} + O(\Delta)$$

donc la condition "unique"

$$(10) \quad f_7(t+\Delta t) = -f_5^*(t) + \frac{p_0}{18}, \quad i = N_x, j = N_y.$$

• Nous donnons les équations équivalentes au schéma jusqu'à l'ordre 2. Compte tenu de (7), on a

$$(11) \quad m_k(t+\Delta t) = \sum_{j,l} M_{kj} M_{jl}^{-1} m_l^*(x - v_j \Delta t, t).$$

on a  $m$  qui à l'ordre 1, on a pour les moments conservés

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} J = O(\Delta) \\ \frac{\partial J^\alpha}{\partial t} + \Lambda_{\alpha\beta}^l \partial_\beta m_l^{eq} = O(\Delta), \quad 1 \leq \alpha \leq d \end{cases}$$

Pour les moments non conservés,

$$m_k + \Delta t \partial_t m_k + O(\Delta^2) = m_k^* - \sum_{l,d} M_{kj} v_j^\alpha M_{jl}^{-1} \Delta t \partial_\alpha m_l^* + O(\Delta^2)$$

D'où

$$m_k = m_k^* - \Delta t \left[ \partial_t m_k^{eq} + \Lambda_{k\beta}^l \partial_\beta m_l^{eq} \right] + O(\Delta^2)$$

comme

$$(13) \quad m_k^* = m_k + \Delta t (m_k^{eq} - m_k), \quad k \geq d+1$$

pour un moment non conservé, on a

$$(14) \quad m_k^* = m_k^{eq} - \frac{\Delta t}{\hbar k} \theta_k + O(\Delta^2)$$

avec  $\theta_k$  le défaut de conservation.

$$(15) \quad \theta_k = \partial_t m_k^{eq} + \Lambda_{k\beta}^l \partial_\beta m_\ell^{eq}, \quad k \geq d+1.$$

\* on remarque qu'on peut aussi définir  $\theta_k$  grâce à la relation (15) pour  $k=0$  et  $k=\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq d$ ). Alors la conservation au premier ordre s'écrit simplement

$$(16) \quad \theta_k = O(\Delta), \quad 0 \leq k \leq d,$$

mais il n'en est plus ainsi si  $k > d$ .

\* De (13) et (14), on tire

$$m_k^* = m_k^{eq} - \frac{\Delta t}{\hbar k} \theta_k + \Delta t \theta_k + O(\Delta)$$

$$(17) \quad m_k^* = m_k^{eq} + \Delta t \left(1 - \frac{1}{\hbar k}\right) \theta_k + O(\Delta^2).$$

• on peut maintenant développer la loi de propagation (11) à l'ordre 2:

$$m_k + \Delta t \partial_t m_k + \frac{1}{2} \Delta t^2 \partial_t^2 m_k + O(\Delta^3) =$$

$$= m_k^* - \Delta t \Lambda_{k\beta}^l \partial_\beta m_\ell^* + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{j,l} \Pi_{kj} \Pi_{\beta j}^{-1} \Pi_{jl}^{-1} \partial_\beta^2 m_\ell^* + O(\Delta^3)$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} m_k^* - m_k &= \Delta t \left[ \partial_t m_k + \Lambda_{k\beta}^l \partial_\beta m_\ell^* \right] + O(\Delta^3) \\ &+ \frac{1}{2} \Delta t^2 \left[ \partial_t^2 m_k^{eq} - \sum_{j,l} \Pi_{kj} \Pi_{\beta j}^{-1} \Pi_{jl}^{-1} \partial_\beta^2 m_\ell^{eq} \right] \end{aligned} \right.$$

- au regard (18), pour les moments conservés, c'est à dire  $k=0$ ,  $k=\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq d$ . on a d'abord, puisque  $M_{0j} = 1 \quad \forall j$  et  $\Lambda_{0\beta}^l = \delta_{\beta 0}$ :  

$$\partial_t \rho + \partial_\alpha J_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \left[ \partial_t^2 \rho - \Lambda_{\beta\gamma}^l \partial_{\beta\gamma}^2 m_l^{eq} \right] = o(\Delta^2).$$
 or compte tenu de (12):

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \rho &= -\pi (\operatorname{div} J) = -\partial_\alpha (\partial_t J_\alpha) + o(\Delta) \\ &= -\partial_\alpha \left[ -\Lambda_{\alpha\beta}^l \partial_\beta m_l^{eq} \right] + o(\Delta) \end{aligned}$$

et

$$(19) \quad \partial_t^2 \rho - \Lambda_{\beta\gamma}^l \partial_\beta \partial_\gamma m_l^{eq} = o(\Delta).$$

D'où la conservation de la masse à l'ordre 2.

$$(19) \quad \partial_t \rho + \partial_\alpha J_\alpha = o(\Delta^2).$$

- Pour exploiter (18) avec  $k=\alpha$ , on se concentre d'abord sur la dérivée d'ordre 2 en temps:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 J_\alpha &= -\Lambda_{\alpha\beta}^l \partial_t \partial_{\beta\gamma} m_l^{eq} + o(\Delta) \\ &= -\Lambda_{\alpha\beta}^l \partial_\beta \left[ \partial_t m_l - \Lambda_{l\gamma}^p \partial_\gamma m_p^{eq} \right] + o(\Delta) \\ &= -\Lambda_{\alpha\beta}^l \partial_\beta \partial_t m_l + \Lambda_{\alpha\beta}^l \Lambda_{l\gamma}^p \partial_\beta \partial_\gamma m_p^{eq} + o(\Delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \Lambda_{\alpha\beta}^l \Lambda_{l\gamma}^p &= \sum_{l, \beta, \gamma} M_{\alpha j} M_{\beta j} M_{j l}^{-1} M_{l \gamma} M_{\gamma q} M_{q p}^{-1} \\ &= \sum_j M_{\alpha j} M_{\beta j} M_{\gamma j}^{-1} \end{aligned}$$



Comme  $\theta_l = O(\Delta)$  si  $k \leq d$ , on en déduit  $\neq$

$$(20) \quad \partial_t^2 J_\alpha = - \sum_{l > d} \Lambda_{\alpha\beta}^l (\partial_\beta \theta_l) + \sum_j M_{\alpha j} \cdot \pi_{\beta j} \cdot \pi_{\gamma j} \cdot \pi_{\delta j}^{-1} (\partial_\beta \sigma_{\delta l}^{eq}) + O(\Delta^2)$$

\* on injecte aussi (17) au sein de (18) (avec  $k=\alpha$ ), en posant

$$(21) \quad \frac{1}{S_k} - \frac{1}{2} \equiv \sigma_k, \quad k > d:$$

$$\partial_t J_\alpha + \Lambda_{\alpha\beta}^l \partial_\beta \left[ m_l^{eq} + \Delta t \left( 1 - \frac{1}{2} - \sigma_l \right) \theta_l + O(\Delta^2) \right] + \frac{1}{2} \Delta t \left( - \sum_{l > d} \Lambda_{\alpha\beta}^l (\partial_\beta \theta_l) \right) + O(\Delta^2).$$

D'où la conservation de l'impulsion à l'ordre 2:

$$(22) \quad \partial_t J_\alpha + \Lambda_{\alpha\beta}^l \partial_\beta m_l^{eq} - \sum_{l > d} \Delta t \sigma_l \Lambda_{\alpha\beta}^l (\partial_\beta \theta_l) = O(\Delta^2).$$

- Pour le schéma de Boltzmann sur réseau D2Q9, le tenseur  $\Lambda_{\alpha\beta}^l$  pour  $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$  est non nul seulement pour  $l=3, 4$  et  $5$ . De plus, le calcul de  $\theta_3, \theta_4, \theta_5$  demande d'expliciter les  $\Lambda_{3\beta}^l, \Lambda_{4\beta}^l$  et  $\Lambda_{5\beta}^l$  pour  $1 \leq \beta \leq 2$  et  $l \geq 0$ . On a le tableau suivant (calcul élémentaire à partir de la matrice  $M$ ):



$l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Lambda_{11}^{\bullet}$	$\frac{2\lambda^2}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$\Lambda_{12}^{\bullet} = \Lambda_{21}^{\bullet}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$\Lambda_{22}^{\bullet}$	$\frac{2\lambda^2}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$\Lambda_{31}^{\bullet}$	0	$\lambda^2$	0	0	0	0	1	0	0
$\Lambda_{32}^{\bullet}$	0	0	$\lambda^2$	0	0	0	0	1	0
$\Lambda_{41}^{\bullet}$	0	$\frac{\lambda^3}{3}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0
$\Lambda_{42}^{\bullet}$	0	0	$-\frac{\lambda^3}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0
$\Lambda_{51}^{\bullet}$	0	0	$\frac{2}{3}\lambda^2$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0
$\Lambda_{52}^{\bullet}$	0	$\frac{2}{3}\lambda^2$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0

grâce aux relations (15) et aux moments à l'équilibre, on peut développer les  $\theta_l$  (pour  $l=3,4,5$ ) au premier ordre :

$$(23) \quad \begin{cases} \theta_3 = 2\lambda^2 (\text{div } J) + \text{ordre supérieur} \\ \theta_4 = \frac{2}{3}\lambda^2 (\partial_x J_x - \partial_y J_y) + \text{ordre supérieur} \\ \theta_5 = \frac{\lambda^2}{3} (\partial_x J_y + \partial_y J_x) + \text{ordre supérieur} \end{cases}$$

Quand on injecte ces expressions dans les relations (22), on obtient si  $\sigma_4 = \sigma_5$ , c'est à dire  $s_{xx} = s_{xy}$  :

$$(24) \sum_{l \geq 3} \Delta t \sigma_l \wedge_{\alpha\beta}^l \left( \frac{\partial \theta}{\partial x^l} \right) = \frac{\lambda^2}{3} \Delta t \left( \sigma_4 \Delta J_\alpha + \sigma_3 \partial_\alpha (\text{div} J) \right) \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \quad 9$$

et finalement les équations (22) sont de type "Navier Stokes" pour l'impulsion :

$$(25) \partial_t J + \text{div} \left( \frac{1}{\rho} J \otimes J \right) + \frac{\lambda^2}{3} \nabla p - \mu \nabla J - \zeta \nabla (\text{div} J) = 0(\Delta^2)$$

ce qui met en évidence une viscosité de cisaillement  $\mu$  et une viscosité de volume  $\zeta$  qui satisfont à

$$(26) \quad \mu = \frac{\lambda^2}{3} \Delta t \sigma_4, \quad \zeta = \frac{\lambda^2}{3} \Delta t \sigma_3.$$

\* on retrouve le même type de viscosité que pour les schémas à une dimension spatiale ; si on change le maillage (donc  $\Delta x$  et  $\Delta t$ , avec  $\lambda = \Delta x / \Delta t$  fixé dans notre analyse), on doit changer  $s_k$  (retour à l'équilibre, cf (13)) de sorte que le  $\mathbb{R}$  produit  $\sigma_k \Delta t$  reste constant.

Paris, 2 février 2013

Bukari.