COURS 1

Autour de l'équation de Boltzmann (2)

- Théorème H
- Equations d'Euler
- Calcul de l'équilibre thermodynamique
- Equilibres approchés

François Dubois, février 2010, 18 pages.

• Théorème H.

Avec Boltzmann (1872), on introduit l'entropie mathématique H définie par

(24) $\quad H = \sum_j f_j \log f_j$.

On sait que la fonction $[0, +\infty[\ni f \mapsto f \log f$ est convexe et $d(f \log f) = (1 + \log f)\, df$.
Dans la formulation de R. Gatignol avec des vitesses discrètes, le "théorème H" prend la forme qui suit :

(Th) "Théorème H"

Si l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes (14) admet une solution $f_j(x,t)$ positive assez régulière, on a l'inégalité

(25) $\quad \dfrac{\partial H}{\partial t} + \partial_\alpha \Big(\sum_j f_j v_j^\alpha \log f_j \Big) \leq 0$

avec H donné à la relation (24).

• La preuve consiste à multiplier l'équation (14) par $(1 + \log f_j)$ puis à sommer sur j, $0 \leq j \leq J$.
Il vient facilement

$$\sum_j (1 + \log f_j) \frac{\partial f_j}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{et}$$

$$\sum_j (1 + \log f_j)\, v_j^\alpha \partial_\alpha f_j = \partial_\alpha \Big[\sum_j f_j v_j^\alpha \log f_j \Big].$$

Il reste à évaluer la "production" P définie par

(26) $P = \sum_j (1+\log f_j)\, Q_j(f,f)$.

Comme μ_0 défini en (21) est un moment conservé, on a aussi $P = \sum_j (\log f_j)\, Q_j(f,f)$, soit

(27) $P = \sum_{ijkl} \log f_j \left(A^{ij}_{kl} f_k f_l - A^{kl}_{ij} f_i f_j\right) \equiv P_1 - P_2$

* Compte tenu de la propriété de symétrie des entrants (9), le premier terme P_1 du membre de droite de (27) peut s'écrire

$$P_1 = \frac{1}{2}\sum (\log f_i + \log f_j)\, A^{ij}_{kl} f_k f_l$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{ijkl} (\log f_k + \log f_l)\, A^{kl}_{ij} f_i f_j$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{ijkl} (\log f_i + \log f_j)\, A^{ij}_{kl} f_k f_l + \frac{1}{4}(\log f_k + \log f_l)\, A^{ij}_{kl} f_i f_j$$

en prenant en compte l'hypothèse (11) de micro-réversibilité. Par ailleurs, le second terme P_2, dû à la symétrie (10) des sortants, prend la forme

$$P_2 = \frac{1}{2}\sum_{ijkl} (\log f_j + \log f_i)\, A^{kl}_{ij} f_k f_l$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{ijkl} (\log f_k + \log f_l)\, A^{ij}_{kl} f_i f_j$$

par une simple permutation du nom des indices muets. Donc P_2 est égal à la demi-somme des deux expressions précédents :

$$P_2 = \frac{1}{4} \sum_{ijkl} (\log f_i + \log f_j) A_{ij}^{kl} f_i f_j$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{ijkl} (\log f_k + \log f_l) A_{kl}^{ij} f_k f_l$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{ijkl} (\log f_i + \log f_j) A_{kl}^{ij} f_i f_j$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{ijkl} (\log f_k + \log f_l) A_{kl}^{ij} f_k f_l$$

grâce à la microréversibilité (11). La différence $P_1 - P_2$ peut donc s'écrire :

$$P = \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \log \frac{f_i f_j}{f_k f_l} A_{kl}^{ij} f_k f_l$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \log \frac{f_k f_l}{f_i f_j} A_{kl}^{ij} f_i f_j$$

c'est à dire

(28) $$P = \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \log \frac{f_i f_j}{f_k f_l} A_{kl}^{ij} (f_k f_l - f_i f_j)$$

* si $f_i f_j \geqslant f_k f_l$, alors $\log\left(\frac{f_i f_j}{f_k f_l}\right) \geqslant 0$ et le terme correspondant de P grâce à la relation (28) est négatif car $A_{kl}^{ij} \geqslant 0$. Si au

contraire $f_i f_j \leq f_k f_l$, alors $\log \frac{f_i f_j}{f_k f_l} \leq 0$ et comme $A_{kl}^{ij} \geq 0$, le terme correspondant au membre de droite de l'expression (28) est encore négatif ! Tous les termes du membre de droite de (28) sont négatifs si la micro réversibilité (11) est satisfaite. Il en résulte que $P \leq 0$, ce qui montre la relation (25). Le théorème est établi. $\square$

- Il est naturel de s'intéresser au cas d'égalité dans l'inégalité (25). Dans ce cas, $P=0$ et ceci n'est possible que tous les termes de (28) sont nuls, c'est à dire si l'on a

$$(29) \quad (\log f_i + \log f_j - \log f_k - \log f_l) A_{kl}^{ij} = 0$$

pour tout quadruplet d'indices (i, j, k, l). Le vecteur $\log f$ de composantes $\log f_j$ pour $0 \leq j \leq J$ vérifie donc les relations (20) et il appartient donc à l'espace des moments conservés :

$$(30) \quad \log f \in \langle mc \rangle$$

La réciproque est claire ; si $\log f \in \langle mc \rangle$, la relation (29) est satisfaite quel que soit (i, j, k, l) et la relation (28) montre que

$\mathcal{P}=0$, c'est à dire que l'inégalité (25) est dans ce cas une <u>égalité</u>.

Prop et def Equilibre thermodynamique.

La production d'entropie $\mathcal{P}$ définie par (26) et donnée par (28) sous l'hypothèse de microréversibilité est nulle si et seulement si la relation (30) a lieu, c'est à dire si le vecteur $\log f$ de composantes $\log f_j$ $(0 \leq j \leq J)$ appartient à l'espace $\langle mc \rangle$ des moments conservés. Dans ce cas, on dit que f est une "distribution à l'équilibre thermodynamique" ou plus simplement une distribution à l'équilibre.

- <u>Equations d'Euler</u>.

Dans ce paragraphe, on suppose la distribution f "à l'équilibre". Il est alors naturel d'introduire les variables conservées ρ, q, ε de masse, d'impulsion et d'énergie :

(31) $$\rho = \sum_j f_j$$

(32) $$\rho u \equiv q = \sum_j v_j f_j \in \mathbb{R}^d$$

(33) $$\rho E \equiv \varepsilon = \frac{1}{2} \sum_j |v_j|^2 f_j$$

on multiplie (14) successivement par 1, v_j et $\frac{1}{2}|v_j|^2$. Alors le membre de droite est nul car μ_0, μ_α et μ_e appartiennent à <mc>. Il est naturel d'introduire les moments d'ordre supérieur

(34) $$F_{\alpha\beta} \equiv \sum_j v_j^\alpha v_j^\beta f_j^{eq}$$

(35) $$Q_\alpha \equiv \frac{1}{2} \sum_j |v_j|^2 v_j^\alpha f_j^{eq}$$

et on a la

Prop <u>Lois de conservation</u>.

Si la distribution f_j est à l'équilibre, l'équation de Boltzmann discrète (14) se réduit au système des équations d'Euler pour les variables conservées introduites en (31)(32)(33) :

(36) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u^\alpha) = 0$$

(37) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(F_{\alpha\beta}) = 0$$

(38) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} Q_\alpha = 0.$$

- <u>La preuve</u> consiste à évaluer le membre de gauche de (14) après multiplication par 1, v_j et $\frac{1}{2}|v_j|^2$ puis sommation sur j, sachant que le membre de droite est nul. Il vient

$$\sum_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} + v_j \cdot \nabla f_j\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_\alpha \left(\sum_j v_j^\alpha f_j\right)$$
$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_\alpha (\rho u^\alpha) \qquad (\text{cf}(32))$$

et la relation (36) s'en déduit. De même,

$$\sum_j v_j^\alpha \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} + v \cdot \nabla f_j\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u^\alpha) + \partial_\beta \left(\sum_j v_j^\alpha v_j^\beta f_j^{eq}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho u^\alpha) + \partial_\beta F_{\alpha\beta} \qquad (\text{cf}(34))$$

ce qui établit (37). Enfin, on a

$$\sum_j \frac{1}{2} |v_j|^2 \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} + v \cdot \nabla f_j\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \partial_\beta \left(\sum_j \frac{1}{2} |v_j|^2 v_j^\beta f_j^{eq}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \partial_\beta Q_\beta \qquad (\text{cf}(35)),$$

d'où la relation (38). La proposition en résulte. □

Prop Tenseur des pressions.

Avec les notations (31) à (35), on pose

$$(39) \qquad p^{\alpha\beta} \equiv \sum_j (v_j^\alpha - u^\alpha)(v_j^\beta - u^\beta) f_j^{eq},$$

qui définit le tenseur des pressions. Alors les moments d'ordre supérieur $F_{\alpha\beta}$ et Q_α s'écrivent simplement

$$(40) \qquad F_{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + p^{\alpha\beta}$$

(41) $Q_\alpha = \rho u^\alpha E + \sum_\beta p^{\alpha\beta} u^\beta + q_\alpha$

où q_α est le flux de chaleur défini par

(42) $q_\alpha \equiv \frac{1}{2} \sum_j |v_j - u|^2 (v_j^\alpha - u^\alpha) f_j^{eq}$

- La preuve consiste simplement à développer $p^{\alpha\beta}$ et q_α :

$$p^{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} - u^\alpha(\rho u^\beta) - (\rho u^\alpha) u^\beta + u^\alpha u^\beta \rho$$
$$= F_{\alpha\beta} - \rho u^\alpha u^\beta, \text{ ce qui établit (40)}.$$

Par ailleurs,

$$q_\alpha = \frac{1}{2} \sum_j \left(|v_j|^2 - 2 v_j^\beta \cdot u^\beta + |u|^2\right)(v_j^\alpha - u^\alpha) f_j^{eq}$$
$$= Q_\alpha - u^\alpha \rho E - u^\beta (F_{\alpha\beta} - \rho u^\alpha u^\beta) + \frac{1}{2}|u|^2 (\rho u^\alpha - u^\alpha \rho)$$
$$= Q_\alpha - \rho u^\alpha E - u^\beta p^{\alpha\beta}$$

et la relation (42) en résulte. $\blacksquare$

- Il importe ensuite de bien choisir l'ensemble discret de vitesses $\mathcal{V}$ et la distribution à l'équilibre f_j^{eq} de sorte que le tenseur des pressions défini à la relation (39) soit diagonal :

(43) $p^{\alpha\beta} = p\, \delta^{\alpha\beta}$

où $\delta^{\alpha\beta}$ désigne le symbole de Kronecker et le flux de chaleur φ identiquement nul :

(44) $\quad \varphi_\alpha = 0 \,, \qquad 1 \leq \alpha \leq d .$

Dans ce cas, les lois de conservation (36)(37)(38) deviennent les équations d'Euler de la dynamique des gaz :

$$(45) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_\alpha (\rho u^\alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u^\alpha) + \partial_\beta (\rho u^\alpha u^\beta) + \partial_\alpha p = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \partial_\alpha (\rho u^\alpha E + p u^\alpha) = 0 . \end{cases}$$

- On remarque que si la relation (physique !) (43) est satisfaite et que de plus la pression est donnée par l'<u>approximation acoustique</u>

(46) $\quad p = c_0^2 \rho$

qui permet d'introduire une vitesse (constante dans cette approximation) des ondes sonores, alors le tenseur $F_{\alpha\beta}$ du second ordre introduit en (34) s'écrit simplement

(47) $\quad F_{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + c_0^2 \rho \, \delta^{\alpha\beta} .$

• Calcul de l'équilibre thermodynamique

Dans ce paragraphe, nous supposons que l'espace $\langle mc \rangle$ des moments conservés est engendré par les vecteurs μ_0, μ_α, μ_e introduits aux relations (21), (22), (23). Il est donc de dimension $d+2$. Si l'équilibre est effectif, la relation (30) implique l'existence de nombres φ_0, φ_α et φ_e de sorte que

$$(48) \quad \log f^{eq} = \varphi_0 \, \mu_0 + \sum_{\alpha=1}^{d} \varphi_\alpha \, \mu_\alpha + \varphi_e \, \mu_e$$

c'est à dire

$$(49) \quad \log f_j^{eq} = \varphi_0 + \varphi_\alpha v_j^\alpha + \frac{1}{2} \varphi_e |v_j|^2 , \quad 0 \leq j \leq J.$$

et on retrouve l'équilibre exponentiel via une Maxwellienne du cas d'une répartition continue de vitesse.

Prop Problème d'optimisation

Si la distribution d'équilibre f_j^{eq} est strictement positive $\forall j$, les coefficients $\varphi_0, \varphi_\alpha, \varphi_e$ s'interprètent comme des multiplicateurs de Lagrange pour le problème de minimisation de l'entropie $H \equiv \sum_j f_j \log f_j$ sous les contraintes (31) à (33), c'est à dire

$$(50) \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Min} \quad \sum_j f_j \log f_j \\ \sum_j f_j = \rho , \ \sum_j v_j f_j = \rho u , \ \sum_j \frac{1}{2} |v_j|^2 f_j = \rho E . \end{array} \right.$$

• La preuve consiste à introduire le Lagrangien pour le problème (50) (qu'on suppose avoir une solution $f_j > 0$ pour tout j afin d'éviter les difficultés liées à la contrainte fondamentale $f_j \geq 0$), c'est à dire

(51) $\mathcal{L} \equiv \sum_j f_j \log f_j + a \sum_j f_j + b \sum_j v_j f_j + c \sum_j \frac{1}{2}|v_j|^2 f_j$.

Alors les conditions $\partial\mathcal{L}/\partial f_j = 0$ entraînent très simplement $\log f \in \langle mc \rangle$, qu'on peut écrire sous la forme (49). Le lien entre les coefficients ψ_0, ψ_d, ψ_e et les multiplicateurs a, b, c est facile à expliciter. ☐

• Le calcul effectif de la distribution d'équilibre en fonction des variables conservées $\rho, \rho u, \rho E$ demande donc de calculer K, b, c de sorte que

(51) $$f_j^{eq} = K \exp\left(-b\cdot v_j - \frac{c}{2}|v_j|^2\right), \quad 0 \leq j \leq J$$

(52) $$\sum_j f_j^{eq} = \rho, \quad \sum_j v_j f_j^{eq} = \rho u, \quad \sum_j \frac{1}{2}|v_j|^2 f_j^{eq} = \rho E$$

Le système (51)(52) est un système de $(d+2)$ équations à $(d+2)$ inconnues, paramétré par les grandeurs conservées $\rho, \rho u, \rho E$ et l'ensemble fini de vitesses v_j $(0 \leq j \leq J)$ Sa <u>non-linéarité</u> l'a rendu peu attractif pour les concepteurs de schémas numériques jusqu'à présent.

• Equilibres approchés.

On suppose pour fixer les idées que la famille $(v_j)_{0\leq j\leq J}$ de vitesses satisfait aux relations

$$(53) \qquad \sum_j v_j = 0$$

$$(54) \qquad \sum_j v_j^{\alpha} v_j^{\beta} = \varsigma^2 \delta^{\alpha\beta} \,, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq d$$

$$(55) \qquad \sum_j (v_j^{\alpha})^2 v_j^{\beta} = 0 \,, \quad 1 \leq \alpha \leq d \,, \; 1 \leq \beta \leq d$$

* C'est le cas pour la familles de vitesses $\mathcal{V}_1$ associée au schéma "D1Q3" (Figure 3). Rappelons que la nomenclature "DdQ(J+1)" signifie qu'il s'agit d'un réseau quadrangulaire à d dimensions spatiales et qui utilise $(J+1)$ vitesses discrètes. On a donc

$$(56) \qquad \mathcal{V}_1 = \{-\lambda, 0, \lambda\}$$

La relation (53) est claire, la propriété (54) également avec $\varsigma^2 = 2$ et l'identité (55) se déduit ici facilement de (53).

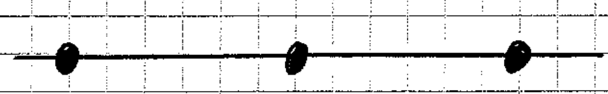
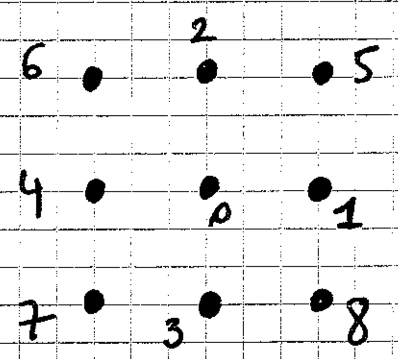


Figure 3 Réseau D1Q3 à une dimension d'espace



<u>Figure 4</u>. Réseau D2Q9 à deux dimensions

∗ Le réseau bidimensionnel D2Q9 (Figure 4) est défini par une famille de vitesses v_2 dont on peut préciser les composantes, en suivant la numérotation classique de la figure 4 :

$$(57)\quad v_2 = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La relation (53) est bien vérifiée parce que le réseau est à symétrie centrale ;

$$(58)\quad \forall j,\ \exists \sigma(j),\quad v_j + v_{\sigma(j)} = 0.$$

La relation (54) résulte d'une part que la somme des produits croisés $v_j^1 v_j^2$ est nulle et d'autre part du fait que sur les neuf vitesses, six seulement ont au moins une composante non nulle, ie $\xi^2 = 6$. La relation (55) résulte du fait que les quatre vitesses v_1 à v_4 sont de somme nulle et qu'il en est de même des quatre vitesses v_5 à v_8 de module $\lambda\sqrt{2}$.

- Pour la recherche d'un premier <u>équilibre linéaire</u>, on suppose qu'il y a $(d+1)$ moments conservés (la masse et l'impulsion). On fait donc $c=0$ au sein de la relation (51) et on linéarise pour les "petites" vitesses v_j. On cherche donc f_j^{eq} sous la forme

(57) $$f_j^{eq} = K - b \bullet v_j \,, \quad 0 \leq j \leq J.$$

De $\sum_j f_j^{eq} = \rho$ on tire (en utilisant la relation (53)) :

(58) $$K(J+1) = \rho \,.$$

* Par ailleurs, on a

$$\rho u = \sum_j v_j f_j^{eq} = -\sum_j (b_j \bullet v_j) v_j$$

$$= -\sum_j (b_1 v_j^1 + b_2 v_j^2) v_j = -b \zeta^2 \,, \text{ et}$$

(59) $$b = -\frac{1}{\zeta^2} \rho u$$

Prop <u>Equilibre polynomial de degré 1.</u>

Si le réseau $\mathcal{V}$ satisfait aux relations (53) et (54), une distribution d'équilibre approché de la forme (57) est possible, avec K donné en (58) et b en à la relation (59) :

(60) $$f_j^{eq} = \frac{\rho}{J+1} + \frac{1}{\zeta^2} \rho u \bullet v_j \,, \quad 0 \leq j \leq J.$$

• Equilibre approché quadratique

Nous suivons ici un article de I. Karlin et al (1998). On suppose toujours que l'espace <mc> des moments conservés est de dimension $d+1$.
On développe l'équilibre "exact" donné à la relation (51) [avec $c=0$] à l'ordre deux :

$$f_j^{eq} = \exp(a - b \cdot v_j)$$
$$\simeq K\left(1 - b \cdot v_j + \frac{1}{2}(b \cdot v_j)^2\right)$$

que l'on "approche" par :

$$(61) \quad f_j^{eq} = K\left(1 - \frac{b}{2} \cdot v_j\right)^2, \quad 0 \leq j \leq J$$

ce qui revient à remplacer $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$ dans la formule de Taylor à l'ordre deux !

* On a

$$\sum_j |b \cdot v_j|^2 = \sum_j (b_1 v_j^1 + b_2 v_j^2)^2 = \varsigma^2 |b|^2.$$

donc

$$\rho = \sum_j f_j^{eq} = K \sum_j \left(1 - b \cdot v_j + \frac{1}{4} |b \cdot v_j|^2\right)$$
$$= K\left(J+1 + \frac{1}{4} \varsigma^2 |b|^2\right)$$

Par ailleurs, nous avons vu que $\sum_j v_j (b \cdot v_j)$ est egal à $\varsigma^2 b$. On a donc

$$\rho u = K \sum_j \left(1 - b \cdot v_j + \frac{1}{4} |b \cdot v_j|^2\right) v_j = -K \varsigma^2 b$$

compte tenu de la relation (55).

On tire des considérations précédentes que le couple $(K, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ est solution du système

$$(62) \quad \begin{cases} K\left(J+1+\frac{1}{4}\,\varsigma^4 |b|^2\right) = \rho \\ b = -\frac{1}{K\varsigma^2}\,\rho u . \end{cases}$$

On tire b de la seconde équation et on le reporte dans la première :

$$K(J+1) + \frac{1}{4} K\varsigma^2 \frac{1}{K^2\varsigma^4}\,\rho^2 |u|^2 = \rho$$

soit

$$(63) \quad (J+1)K^2 - \rho K + \frac{1}{4\varsigma^2}\,\rho^2 |u|^2 = 0 .$$

Avec Karlin (1998), on pose

$$(64) \quad R \equiv \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{J+1}{\varsigma^2}|u|^2}\right)$$

qui est bien défini pour u de module "pas trop grand", c'est à dire

$$(65) \quad |u| \leq \frac{\varsigma}{\sqrt{J+1}} .$$

* Dans ce cas, $R \in \mathbb{R}$ et on choisit la racine qui redonne la relation (58) pour $|u|$ petit. Il vient

$$(66) \quad K = \frac{\rho}{2(J+1)}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{J+1}{\varsigma^2}|u|^2}\right) = \frac{\rho R}{J+1} .$$

La distribution d'équilibre quadratique (61) peut donc s'expliciter :

(67) $f_j^{eq} = \frac{\rho}{J+1}\left(R + \frac{J+1}{\varsigma^2} u \cdot v_j + \frac{1}{4}\left(\frac{J+1}{\varsigma^2}\right)^2 \frac{1}{R} |u \cdot v_j|^2\right)$

• Afin d'interpréter physiquement la valeur des paramètres $(J+1)$ et ς^2, on recalcule à partir de (67) le tenseur $F_{\alpha\beta}$ des moments d'ordre deux (voir les relations (31) et (47)). On a à l'ordre 0 relatif à la vitesse u :

$$\sum_j v_j^\alpha v_j^\beta f_j^{eq} = \frac{\rho}{J+1} R \varsigma^2 \delta^{\alpha\beta} + \text{ordre} \geq 2$$

$$= \frac{\rho}{J+1} \varsigma^2 \delta^{\alpha\beta} + \text{ordre} \geq 2$$

en développant la relation (64) à l'ordre 2 par rapport à $|u|$. La confrontation du calcul ci-dessus et de (47) montre que la célérité c_0 des ondes sonores (voir (47)) est donnée via la relation

(68) $$c_0^2 = \frac{\varsigma^2}{J+1} .$$

* Si on introduit le nombre de Mach $|u|/c_0$, la relation (65) exprime $|u| \leq c_0$, c'est à dire $|M| \leq 1$: l'écoulement doit rester partout <u>subsonique</u>. L'ensemble de cette étude est résumée dans la proposition qui suit.

Prop Equilibre quadratique de Karlin

Si l'ensemble $\mathcal{V}$ des vitesses discrètes satisfait aux relations de symétrie (53), (54) et (55), un équilibre quadratique de la forme (61) peut être construit à partir des grandeurs conservées de masse volumique ρ et d'impulsion ρu. Il s'écrit

(69) $$f_j^{eq} = \frac{\rho}{J+1}\left(R + \frac{1}{c_0^2}\, u \bullet v_j + \frac{1}{4R\,c_0^4}\,|u.v_j|^2\right), \quad 0 \leq j \leq J$$

avec R donné par (64), c'est à dire

(70) $$R = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - |u|^2/c_0^2}\right).$$

FDubois 16 février 2010.