Introduction aux systèmes hyperboliques

- version 1.0 - cours de M. Dubois

Février 2008

Table des matières

Chapitre 1

Advection

Soit $a \in \mathbb{R}$, on cherche la fonction $u = u(x,t)$,$x \in \mathbb{R}$ $t \in \mathbb{R}$ solution de l'équation (1) suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

avec une condition initiale.

1.1 Méthode des caractériqtiques

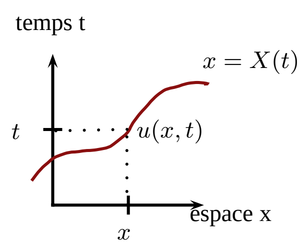
Proposition 1. *Soit $X : \theta \in \mathbb{R} \longrightarrow X(\theta) \in \mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle (2) suivante :*

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = a$$

Alors la fonction du temps suivante v :

$$v(t) = u(X(t), t)$$

est constante si $u(.,.)$ est solution régulière de (1).



Preuve
On cherche si v est constante. v est "u sur la courbe $t \longrightarrow X(t)$". On a :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}a + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

■
Regardons (2) :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{dX}{dt} = a \in \mathbb{R}$$

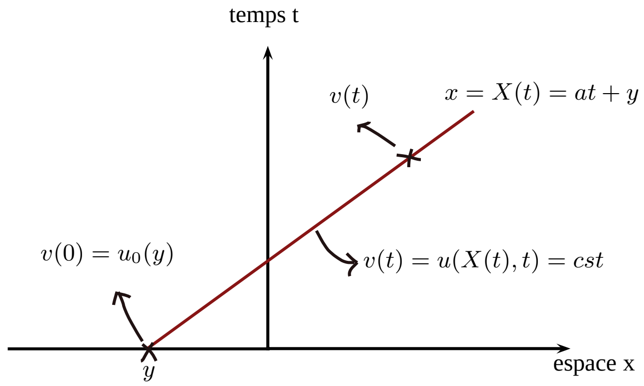
Donc on a :

$$X(t) = at + X(0)$$

Proposition 2. *Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ solution de (1). On prend la condition initiale $u(x,0) = u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors nécessairement on a :*

$$u(x,t) = u_0(x - at)$$

Preuve



On a :

$$\begin{aligned} v(t) &= u(X(t),t) \\ &= u(at+y,t) \\ &= v(0) \\ &= u(y,0) \\ &= u_0(y) \end{aligned}$$

On a alors :

$$u_0(y) = u(at+y,t) \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$$

On effectue le changement de variable $x = at + y$ ce qui donne :

$$u_0(x - at) = u(x,t)$$

égalité vrai $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$

■

La méthode des caractéristiques est l'équations du premier degré de l'hyperbolitien :

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$
$$(3) \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

alors s'il y a une solution $u(x,t) = u_0(x-at)$ (4).

Proposition 3. *Si $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $u = u(x,t)$ donnée par (4) est solution régulière de (1)+(3).*

Preuve

Si $u(x,t) = u_0(x-at)$ alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(u_0)'(x-at)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = (u_0)'(x-at)$$

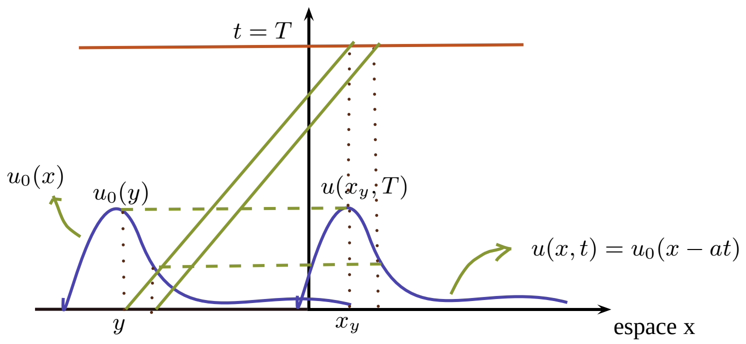
donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

et si $t = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$.

■

Dessin de $u(x,T)$:



1.2 Système de l'acoustique

Le système (1) s'écrit de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial \rho}{\partial t} & +\frac{\partial q}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} & +\frac{\partial p}{\partial x} & = & 0 \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales (2) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho(x,0) & = & \rho_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) & = & u^0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

avec $p = c_0^2\rho$, $q = \rho_0 u$, u vitesse, ρ densité, q impulsion, p pression.
Remarque : Le système (1) est linéaire.
On pose maintenant :

$$\phi_+ = p + \rho_0 c_0 u$$

et

$$\phi_- = p - \rho_0 c_0 u$$

Proposition 4. *ϕ_+ est solution d'une équation d'advection de vitesse $a = c_0$ et ϕ_- est solution d'une équation d'advection de vitesse $a = -c_0$*

Preuve
Faire le calcul...
■

Proposition 5. *La solution analytique du problème de cauchy pour l'acoustique monodimensionnelle (1)+(2) s'écrit :*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u^0(x+c_0t) + u^0(x-c_0t)] - \frac{1}{2\rho_0 c_0}[p^0(x+c_0t) + p^0(x-c_0t)]$$

$$p(x,t) = \frac{1}{2}[p^0(x+c_0t) + p^0(x-c_0t)] - \frac{\rho_0 c_0}{2}[u^0(x+c_0t) + u^0(x-c_0t)]$$

Preuve
Si on connait ϕ_+ et ϕ_- alors on connaitre u et p. Or ϕ_+ et ϕ_- vérifient une équation d'advection différente dont on connait pour chacune la solution analytique. Donc on connait u et p et leurs expressions se retrouvent facilement.
■

1.3 Système hyperbolique linéaire

Ecriture sous forme de sytème hyperbolique :
On pose $w = (\rho, q)$, et $f(w) = (q, p) = (q, c_0\rho)$. On a alors :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0$$

$f = f(w)$ est une fonction linéaire de w.
Soit A une matrice telle que $f(w) = A.w$.
La matrice A s'écrit :

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ c_0^2 & 0 \end{array} \right\}$$

Proposition 6. *La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ces valeurs propres valent c_0 et $-c_0$, ces vecteurs propres s'écrivent :*

$$r_+ = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2c_0^2} \\ \frac{1}{2c_0} \end{array} \right\}$$

$$r_- = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2c_0^2} \\ -\frac{1}{2c_0} \end{array} \right\}$$

Preuve
Diagonaliser la matrice.
■

Proposition 7. *Avec les notations précédentes on a :*

$$(\rho, q) = w = \phi_+ r_+ + \phi_- r_-$$

Les variables caractéristiques ϕ_+ et ϕ_- sont les composantes du vecteur w inconnu dans la base des vecteurs propres de A.

On a $= w = \phi_+ r_+ + \phi_- r_-$ qui est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0$$

alors on a la proposition suivante :

Proposition 8. *On retrouve le fait que ϕ_+ et ϕ_- sont solutions de deux équations d'advection.*

Définition 1. *Soit $w = w(x,t) \in \mathbb{R}^N$, A matrice réelle de $N \times N$ et $f = f(w) = A.w$. On dit que le système linéaire de lois de conservation :*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0$$

est hyperbolique si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Définition 2. *Système (à priori non linéaire) de loi de conservation à deux variables d'espace :*

On prend $w = w(x,y,t) \in \mathbb{R}^N$. On se donne $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ régulière. $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ régulière. L'équation s'écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) + \frac{\partial}{\partial y} g(w) = 0$$

(système qui s'écrit sous forme divergente : $div_{t,x,y}(w, f(w), g(w))$).

<u>Problème de riemann</u>

La résolution de l'équation d'advection en 1D a été effectuée en supposant une certaine régularité $\rfloor^1$ de la solution. Mais cette régularité n'est pas nécessaire dans l'expression de la solution de l'équation $u = u_0(x - at)$. La question qui se pose est : peut-on affaiblir l'hypothèse de régularité et chercher une solution de l'équation d'advection, celle-ci ayant des termes de dérivées mal définies (si par exmeple u est juste continue pr morceaux) ?

Le problème de Rienmann pour l'advection s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{llcr} (1) & \frac{\partial u}{\partial t} \quad +a\frac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \\ (2) & \qquad u(x,0) & = & u_g 1_{\mathbb{R}^-} + u_d 1_{\mathbb{R}^+} \end{array} \right.$$

on note ce problème $\mathcal{R}(u_g, u_d)$, problème de cauchy avec conditions initiales discontinues.

Si on peut résoudre ce problème, la solution s'écrit-elle comme suit :

$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{lcl} u_g & , & x - at < 0 \\ u_d & , & x - at > 0 \end{array} \right.$$

Chapitre 2

Caractéristiques non linéaires

On passe de $a \in \mathbb{R}$ fixé à a fonction de la solution u. Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$a(u) = f'(u)$$

Pour trouver les courbes caractéristiques o résout toujours :

$$\frac{dx}{dt} = a$$

Comme a est une fonction de u on est dans le cas d'un problème non linéaire.
On résout donc l'équation non nécssairement linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{llrcr} (1) & \frac{\partial u}{\partial t} & +a(u)\frac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \\ (2) & & u(x,0) & = & u_0(x) \end{array} \right.$$

Une courbe caractéristique $t \longrightarrow X(t)$ vérifie par définition la relation suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = a(u(X(t),t)) = a(u(x,t))$$

La vitesse $\frac{dX(t)}{dt}$ le long de la courbe caractéristique est égale à a.

2.1 Equation différentielle non linéaire

Proposition 9. *Soit $t \longrightarrow X(t)$ une courbe caractéristique pour l'équation (1) suivante :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

On note la relation de définition des caractéristiques (2) suivante :

$$\frac{dX}{dt} = a(u(X(t),t))$$

Soit $v(t) = u(X(t),t)$ la valeure de la solution $u(.,.)$ sur la courbe caractéristique.
Alors $v = v(t)$ est une fonction constante.

Preuve :
Dériver la fonction v par rapport à sa variable t et utiliser (1) et (2).
■

Proposition 10. *Les caractéristiques sont donc des droites.*

Preuve :
On a :

$$\frac{dX}{dt} = a(u(X(t),t)) = a(v(t)) = a(v(t_0))$$

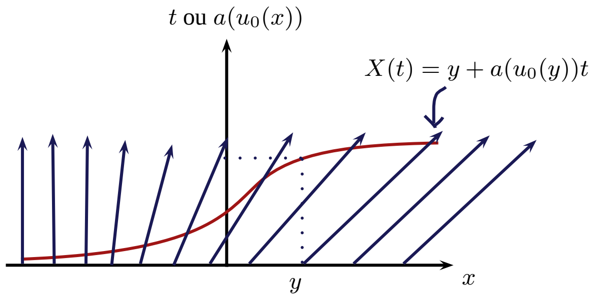
donc $X = X(t)$ est une fonction affine de t.
■
Comment donc résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llrcr} (1) & \frac{\partial u}{\partial t} & +a(u)\frac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \\ (2) & & u(x,0) & = & u_0(x) \end{array} \right.$$

La fonction a est donnée et $a = a(u_0(x))$

On a le résultat suivant : $a(u_0(y))$ est nécessairement la pente de la caractéristique passant par le point $(y, 0)$ à $t = 0$ avec $y = X(0)$.

Voici un graphe représentant a et les caractéristiques :



Mais alors que vaut $u(x,t)$? Il faut regarder la caractéristique passant par le point (x,t) donné. Ainsi il suffira de trouver le $y \in \mathbb{R}$ (unique) tel que $y + ta(u_0(y)) = x$. Si on trouve y, alors nécessairement $u(x,t) = u_0(y)$.

Soit la fonction g_t définit comme suit :

$$g_t(y) = y + ta(u_0(y))$$

avec $t > 0$.

La question qui se pose est si g_t est bijective ce qui nous permettrait d'assurer l'existence et l'unicité de y comme l'on souhaite.

g_t est bijective si par exemple elle est strictement croissante. On a $g_0(y) = y$. Donc :

$$\frac{\partial}{\partial y} g_t(y) = 1 + t(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{du_0}{dy})(y)$$

On fait l'hypothèse suivante :

$$\exists D \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \frac{\partial a}{\partial u}\frac{du_0}{dy} \geq D$$

ce qui revient à dire que :

$$\frac{\partial}{\partial y} g_t(y) \geq 1 + tD, t > 0$$

Considérons différents cas : tout d'abord si $D \geq 0$

alors $\forall t\ \frac{\partial}{\partial y} g_t(y) \geq 1$ donc g_t est strictement croissante.

Si, second cas, $D < 0$, on fixe $t > 0$ tel que :

$$1 + tD \geq \epsilon > 0$$

donc :

$$-tD \leq 1 - \epsilon$$

ce qui donne :

$$t < -\frac{1}{D}$$

On note $T = -\frac{1}{D}$. Donc si $t < T$ alors $\exists \epsilon > 0$ tel que $1 + tD \geq \epsilon$ alors on a :

$$\frac{\partial}{\partial y} g_t(y) \geq \epsilon > 0$$

donc g_t est strictement croissante.

Si $t \geq T$ on ne peut rien dire.

Théorème 1. ***(Solution du problème de Cauchy aux temps petits)***

On se place toujours sur le même problème qui sous forme divergente s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

avec $a(u) = f'(u)$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Avec la condition initiale suivante :

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}$$

On pose $T = +\infty$ si $D \geq 0$ et $T = -\frac{1}{D}$ si $D < 0$

Alors $\forall t \in [0, T[$, le problème (1)(2) ci-haut a une solution unique régulière qui se calcul par la relation que l'on nomme (3) :

$$u(x,t) = u_0((g_t)^{-1}(x))$$

où la fonction g_t est définie par :

$$g_t(y) = y + ta(u_0(y)$$

Preuve :

Vérifions que (3) est solution de (1)(2) et que cette solution est unique.

Pour $t = 0$ $g_t = g_0 = Id$ donc g_t inversible et on a directement que $y = g_t^{-1}(x)$ et donc $u(x,t) = u_0(y)$.

Pour $t > 0$ il faut se servir de l'équation

$$g_t(y) = y + ta(u_0(y))$$

pour extraire l'expression de $\frac{\partial y}{\partial t}$ dont on a besoin dans le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$

On dérive donc l'équation par rapport au temps t et on obtient :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a(u_0(y)) + t\frac{d}{dy}(a(u_0))\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

on a donc l'expression de $\frac{\partial y}{\partial t}$ ce qui donne l'expression de $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u_0)'\frac{-a(u_0(y))}{1 + t(a(u_0))'}$$

On effectue le même raisonnement pour établir l'expression de $\frac{\partial y}{\partial x}$ et obtenir l'expression de $\frac{\partial u}{\partial x}$ suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (u_0)'\frac{1}{1 + t(a(u_0))'}$$

en combinant les deux formules trouvées on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

donc (3) est solution de (1)(2).

L'unicité se montre en utilisant le fait que la méthode des caractéristiques consiste à suivre la caractéristique auquel le point (x,t) appartient et d'en déduire l'expression de la solution à l'aide de la condition initiale. Ce choix de la caractéristique est unique car sur la caractéristique on a :

$$u(x,t) = v(t) = v(0) = u(y,0) = u_0(y)$$

■

2.2 Exemples

2.2.1 Equation de Burgers condition initiale 1

On prend $f(u) = \frac{u^2}{2}$ avec la condition initiale suivante :

$$u_0 = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \in [0,1] \\ 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

On dispose donc de l'équation de Burgers à résoudre lorsque f est de cette forme.

Utilisons la méthode des caractéristiques. L'équation des caractéristiques s'écrit :

$$\frac{dX}{dt} = a(u(X(t),t)) = a(u_0(X(0)))$$

Or $a(u) = f'(u) = u$ donc $a(u_0) = u_0$

Distinguons les différents cas d'absicce à l'origine de la caractéristique :

Si $X(0) < 0$:

Alors on a $X(t) = X(0)$ donc pour un point (x,t) tel que $x < 0$ on a :

$$u(x,t = u(X(t),t) = v(t) = v(0) = u(X(0),0) = u_0(X(0)) = 0$$

Si $X(0) \in [0,1]$:

Alors on a $X(t) = X(0) * (1+t)$ et donc pour un point (x,t) tel que $\frac{x}{1+t} \in [0,1]$ on a :

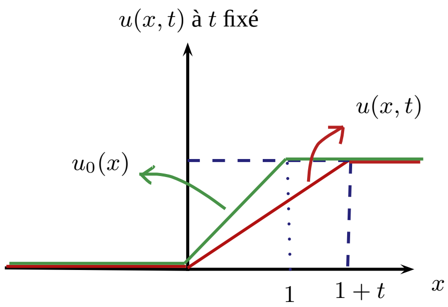
$$u(x,t) = u_0(\frac{x}{1+t}) = \frac{x}{1+t}$$

u est affine de x à t fixé.

Si $X(0) > 1$ **:**
Alors on a $X(t) = t + X(0)$ donc pour un point (x, t) tel que $x - t > 1$ on a :

$$u(x,t) = u_0(x-t) = 1$$

On peut donc maintenant tracé le graphe de $u = u(x,t)$ à $t > 0$ fixé :



2.2.2 Equation de Burgers condition initiale 2

Prenons la même équation mais avec une condition initiale différente comme suit :

$$u_0 = \begin{cases} 1 & si & x < 0 \\ 1-x & si & x \in [0,1] \\ 0 & si & x > 1 \end{cases}$$

On effectue le même raisonnement que précédemment et on obtient selon différent cas :
Si $X(0) < 0$ **:**
Alors si $x - t < 0$ on a :

$$u(x,t) = 1$$

Si $X(0) > 1$ **:**
Alors si $x > 1$ on a :

$$u(x,t) = 0$$

Si $X(0) \in [0,1]$ **:**
Alors si $\frac{x-t}{1-t} \in [0,1]$ on a :

$$u(x,t) = \frac{1-x}{1-t}$$

On peut donc tracer le graphe suivant de la solution $u = u(x,t)$ pour t fixé. On va mettre en évidence l'existance d'un temps T au delà duquel on ne peut rien dire sur la solution u.

On constate graphiquement que le temps T cherché vaut 1. Par le calcul on peut retrouver ce résultat. On a avec la minoration suivante de $\frac{du_0}{dy}$:

$$\frac{du_0}{dy} \geq -1$$

donc :

$$\frac{da}{du}\frac{du_0}{dy} = 1 \times \frac{du_0}{dy} \geq -1$$

d'où $D = -1$ et donc $T = -\frac{1}{D} = 1$

Doc pour s'assurer de l'existence d'une solution unique pour ce problème il faut s'assurer que $t \in [0, 1[$

Chapitre 3

Formulation faible

On va maintenant sortir du cadre des fonctions régulière et essayer de tirer des solutions de la loi de conservation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \qquad (0)$$

u solution "moins régulière". Mais moins régulière en quel sens ?

Voici un premier résultat qui va nous servir dans cette section : la formule de Green.

Proposition 11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On a :*

$$\int_\Omega div(\phi) dx = \int_{\partial\Omega} \phi.n d\gamma$$

On va donc essayer de faire disparaitre les dérivée partielles de u. Pour ce faire on va faire apparaitre une formulation faible.

3.1 Etablissement

Soit ϕ fonction test, $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$. On multiplie (0) par ϕ et on utilise la formule de Green.

On a donc :

$$\int\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u))\phi(x,t)dxdt = \int_{supp(\phi)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u))\phi(x,t)dxdt$$

puis avec Green on a :

$$0 = -\int_{supp(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial t} u + \int_{\partial supp(\phi)} \phi u.n_t d\gamma - \int_{supp(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x} f(u) + \int_{\partial supp(\phi)} \phi f(u) n_x d\gamma$$

On a

$$\int_{\partial supp(\phi)} \phi u.n_t d\gamma = \int_{\Gamma_0(t=0)} \phi u.n_t d\gamma + \int_{\Gamma_1} \phi u.n_t d\gamma$$

avec $\Gamma_1 = \Gamma_0^{C(supp(\phi))}$, complémentaire de Γ_0 dans suport de ϕ.

On a sur Γ_0 : $n_t = -1$ et $n_x = 0$.

puis

$$\Gamma_0 = \int_\infty^\infty dx \phi(x,0)u(x,0)(-1) = -\int_\infty^\infty \phi(x,0)u_0(x)dx$$

et comme $\phi|_{\Gamma_1} = 0$

$$\int_{\Gamma_1} = 0$$

et comme sur Γ_0 $n_x = 0$ et sur Γ_1 $\phi = 0$

$$\int_{\partial supp(\phi)} \phi f(u).n_x d\gamma = \int_{\Gamma_0} \phi f(u) n_x d\gamma + \int_{\Gamma_1} \phi f(u) n_x d\gamma = 0 + 0 = 0$$

Donc on a finalement :

$$\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty[} u\frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x})dxdt = \int_{supp(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x})dxdt = -\int_{\mathbb{R}} \phi(x,0)u_0(x)$$

Donc si u est solution classique (de classe $\mathcal{C}^1$) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1) & \frac{\partial u}{\partial t} & +\frac{\partial}{\partial x} f(u) & = & 0, & x \in \mathbb{R}, & t > 0 \\ (2) & & u(x,0) & = & u_0(x), & x \in \mathbb{R}, & u_0 \in \mathcal{C}^1 \end{cases}$$

alors $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$

$$\int\int (u\frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x})dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,0)u_0(x)dx = 0 \qquad (3)$$

But : Définir la solution du problème de Cauchy $(1) - (2)$ à l'aide de la formulation faible.

Si on ne fait aucune hypothèse sur u, est-on sûr que l'intégrale de (3) est bien définie ? Les deux intégrales intervenant dans (3) sont des intégrales sur des bornées car ϕ est à support compact.

Hypothèse : u bornée sur les compact de $\mathbb{R} \times [0, \infty[$. On note :

$$u \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$$

ou encore $\forall K$ compact de $\mathbb{R} \times [0, \infty[$

$$u \in L_{loc}^{\infty}(K)$$

En particulier pour $K = supp(\phi)$, l'intégrale sur K suivante est alors bien définie :

$$\int_K (u\frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x})dxdt$$

et de même :

$$\int_{\infty}^{\infty} \phi(x,0)u_0(x) < \infty$$

Remarque : Aucune hypothèse n'est faite sur la régularité de u ou u_0.

Définition 3. *(Solution faible du problème de Cauchy) hyp : On suppose $u_0 \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$ et $u \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$.*

On dit que u est solution faible du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} (1) & \frac{\partial u}{\partial t} & +\frac{\partial}{\partial x} f(u) & = & 0, & x \in \mathbb{R}, & t > 0 \\ (2) & & u(x,0) & = & u_0(x), & x \in \mathbb{R}, & \end{cases}$$

si et seulement si $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$

$$\int\int (u\frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x})dxdt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0)u_0(x)dx = 0$$

Proposition 12. *u solution classique du problème de Cauchy $(1) - (2)$ et $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ alors u est solution faible du problème de Cauchy.*

Proposition 13. *u solution faible du problème de Cauchy $(1) - (2)$, $u_0 \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ alors u est solution classique du problème de Cauchy.*

Lemme 1. *Si $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ on a :*

$$\int \star\phi = 0$$

alors $\star = 0$

3.2 Relation de Rankine (1887) et Hugoniot (1889)

Définition 4. *(Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux)*

On dit que u est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si il existe une famille finie de courbes régulières Γ_j tel que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[-\Gamma_j)$

On ne peut rien dire de u sur les courbes Γ_j. Ailleurs, u est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$x \in \mathbb{R} \times [0, \infty[-\bigcup_j \Gamma_j \quad alors \quad u \in \mathcal{C}^1(V(x))$$

De plus, u a une limite, si $x \longrightarrow x_0$, x_0 est un point de l'une des courbes Γ_j.

On définit $u_g(x_0, t_0)$ et $u_d(x_0, t_0)$ comme limites de $u = u(x,t)$ depuis les demi-espaces à "gauche" et à "droite" de la courbe concernée.

Si u est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors $u \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$.

Mais qu'en est-il de la signification de "u solution faible du problème de Cauchy" si u est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ? ?

Proposition 14. *(Rankine et Hugoniot)*
Soit Γ régulière tel que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[-\Gamma)$. On pose $\sigma(t) = \frac{dx}{dt}$ (vitesse de la discontinuité).
On suppose que u est solution faible du problème de Cauchy, alors :
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$ *en tout point (x,t) hors de Γ*
- $[f(u)] = \sigma[u]$, *relation de saut de Rankine-Hugoniot.*

i.a. en tout point $(x,t) \in \Gamma$ on a :

$$[u] = \ saut \ \ de \ \ u \ = u_d - u_g$$

On a :

$$u_d(x,t) = lim_{\epsilon \longrightarrow 0} u(x+\epsilon, t)$$
$$u_g(x,t) = lim_{\epsilon \longrightarrow 0} u(x-\epsilon, t)$$

Preuve :
A faire !
■

Proposition 15. *Soit u de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux qui est solution faible du problème de Cauchy $(1)-(2)$. Alors on a :*
- *u set solution classique hors des courbes de discontinuité (Γ).*
- *Rankine-Hugoniot.*

Proposition 16. *Soit u de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux tel que :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \ \ et \ \ (x,t) \ \ hors \ \ de \ \ \Gamma \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \quad la \ \ ou \ \ u_0 \ \ est \ \ continue \\ [f(u)] = \sigma[u] \ \ sur \ \ \Gamma, & t.q. \ \ \frac{dx}{dt} = \sigma \end{cases}$$

Alors u est solution faible du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Preuve : Intégration par partie "à l'envers".

3.3 Exemples

Exercice 1 :
Prenons l'équation d'advection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

On a $f(u) = a * u$ donc :

$$[f(u)] = \sigma[u]$$

donne :

$$a[u] = \sigma[u]$$

donc soit $[u] = 0$ ou bien $a = \sigma = \frac{dx}{dt}$. les caractéristiques sont les seules courbes où une solution de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux peut être discontinue.

Exercice 2 :
Prenons l'équation de burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0$$

On a $f(u) = \frac{u^2}{2}$ donc $[f(u)] = \sigma[u]$
donc :

$$\frac{1}{2}[u](u_d + u_g) = \sigma[u]$$

donc $[u] = 0$ ou $\frac{1}{2}(u_d + u_g) = \sigma$

Si on prend le cas $u_g = 1$ et $u_d = 0$ alors $\sigma = \frac{1}{2}$. On a donc une solution discontinue avec un saut tel que $\sigma = \frac{1}{2}$.

Or $\sigma = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ donc on a la caractéristique d'équation :

$$2x + cst = t$$

représentant la caractéristique séparant les deux zones d'existence de la solution u discontinue.

3.4 Un interdit

il faut faire attention à la forme conservative de l'équation que l'on manipule. Il ne faut pas mélanger le calcul différentiel usuel et Rankine-Hugoniot. En effet partons d'une équation d'advection sous forme conservative suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) = 0$$

et multiplions cette équation par, par exemple, u^2. On obtient après du calcul differnetiel la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{u^3}{3}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^4}{4}) = 0$$

ce qui revient à :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{4}(3v)^{4/3}) = 0$$

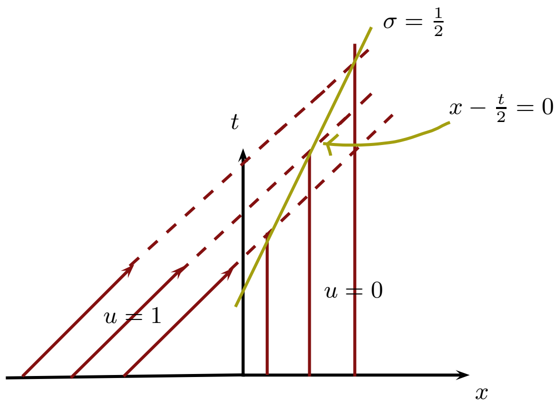
et on applique R.H. à la nouvelle loi de conservation trouvée et on trouve avec $u_g = 1$ et $u_d = 0$:

$$\tilde{\sigma} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$$

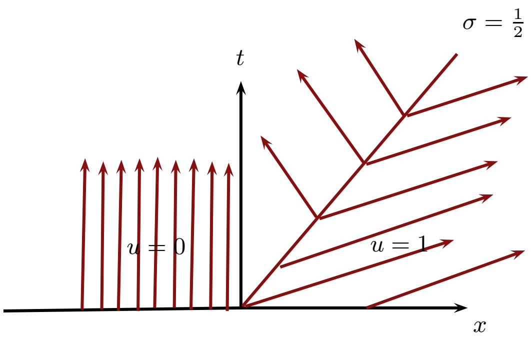
on a une autre vitesse de discontinuité. On a donc au final affaire avec une forme conservative qui s'avère différente de celle de départ (mais elles ont même forme non conservative !), d'où l'importance de ne pas manipuler des calculs réguliers sur des objets non réguliers.

3.5 A retenir

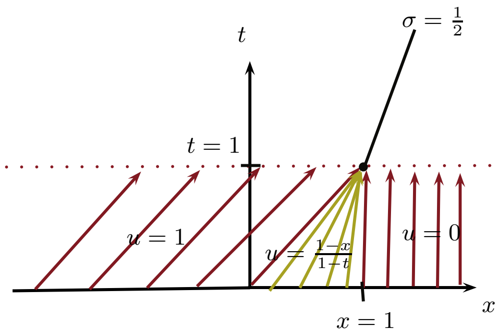
Pour l'équation de Burgers on retiendra les schémas suivants :
Pour $u_0 = u_g = 1$ si $x < 0$ et $u_0 = u_d = 0$ sinon :



Pour $u_0 = u_g = 0$ si $x < 0$ et $u_0 = u_d = 1$ sinon :



Pour $u_0 = 1$ si $x < 0$, $u_0 = 1 - x$ si $0 < x < 1$ et $u = 0$ sinon :



3.6 Ondes de détentes pour l'équation de Burgers

Avec l'équation de Burgers on a le problème de Rienmann (1860) :

$$\begin{cases} (1) & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0 \\ (2) & u(x,0) = u_g 1_{\mathbb{R}^-} + u_d 1_{\mathbb{R}^+} \end{cases}$$

Nous allons tirer quelques propriétés de ce problème pour en déduire une forme de solution possible.

Définition 5. *On dit qu'une équation est invariante par homotétie de l'espace lorsque $u \longrightarrow u(\lambda x)$ est solution de l'équation lorsque $u \longrightarrow u(x)$ l'est.*

On peut vérifier facilement que l'équation du problème de Rienmann est invariante par dilatation i.e. par homotétie de l'espace et du temps par le même coefficient. On vérifie de même que les conditions aux limites sont invariantes par homotétie de l'espace.

On sait donc que si $u = u(x,t)$ est solution du problème alors $u = u(\lambda x, \lambda t)$ est aussi solution du problème. Pour éviter de faire face à des problèmes d'unicité cherchons une solution du problème sous la forme suivante :

$$u = u(x,t) = v(\frac{x}{t})$$

On appelle une solution de cette forme une solution **autosemblable**.

Calculons un peu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t} * (u - \frac{x}{t}) * v'$$

donc on a :

$$v(\xi) = cst \ \ ou \ \ v(\xi) = \xi$$

donc

$$u(x,t) = cst \ \ ou \ \ u(x,t) = \frac{x}{t}$$

On a :

$$\frac{dx}{dt} = u(X(t),t) = u(X(0),0)$$

donc selon le signe de $X(0)$:

$$\frac{dx}{dt} = u_g \ \ ou \ \ \frac{dx}{dt} = u_d$$

donc si $\frac{x}{t} < u_g$ alors $u = u_g$, si $\frac{x}{t} > u_d$ alors $u = u_d$. Que se passe t-il lorsque $u_g < \frac{dx}{dt} < u_d$? On introduit la solution $u = \frac{x}{t}$: ce raccordement caractérise u d'**onde de détente**. On a donc finalement :

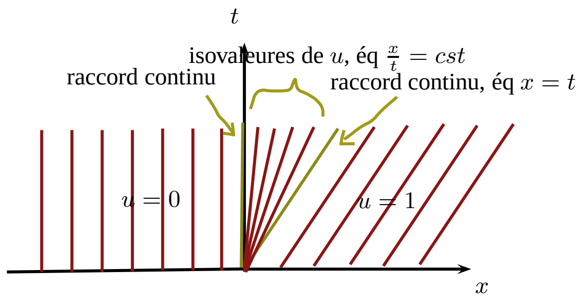
$$u = u(x,t) = \begin{cases} u_g & si & \frac{x}{t} \leq u_g \\ \frac{x}{t} & si & u_g < \frac{x}{t} < u_d \\ u_d & si & \frac{x}{t} \geq u_d \end{cases}$$

u est une fonction continue pour $t > 0$ le long des deux demi-droites $\frac{x}{t} = u_g$ et $\frac{x}{t} = u_d$, et R.H. est vérifié. On a que $u \in L^\infty_{loc}$. u se décompose comme solution classique lorsque $\frac{x}{t} \neq u_g \ \ ou \ \ u_d$.

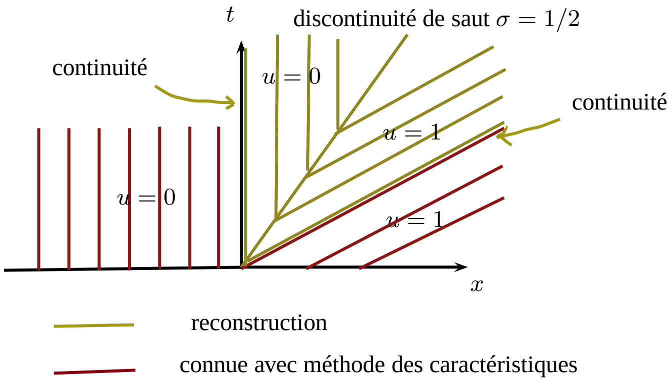
La solution u est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle est donc solution faible du problème de Cauchy de départ.

Pour l'équation de Burgers on a en prenant la même condition initiale $u_g = 0$ et $u_d = 1$, deux solutions bien définies : solution d'**onde de détente** et solution d'**onde de choc**.

Onde de détente :



<u>Onde de choc :</u>



Il n'y a donc pas d'unicité pour la solution faible : on va donc introduire une nouvelle notion pour établir l'unicité : l'entropie mathématique.

Chapitre 4

Entropie mathématique

On a l'équation (1) suivane :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

avec la condition intiale (2) suivante : $u_0(x) = u(x, 0)$

Quel sens donner à "LA" solution du problème de Cauchy formé de $(1) - (2)$?

4.1 Perturbation visqueuse

On introduit une perturbation visqueuse. Soit $\epsilon > 0$, "petit" et considérons l'équation (3) suivante :

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + a\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} - \epsilon\frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} = 0$$

La motivation physique sous-jacente est la suivante : si on prend $f = 0$ et $\epsilon = 1$ on retrouve l'équation de la chaleur qui a une solution dans une très large gamme de conditions initiales. Pour $\epsilon > 0$ le terme rajouté est dominant sur les autres. Donc les "bonnes" propriétés de l'équation de la chaleur se transfèrent à l'équation non linéaire (3).

Hyp : On admet à partir de là que le problème de Cauchy associé à (3) admet une unique solution régulière $u^\epsilon = u^\epsilon(x,t)$ si $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Soit η une fonction $\mathbb{R} :\longrightarrow \mathbb{R}$ convexe régulière, $\eta'' > 0$ et on multiplie (3) par $\eta'(u^\epsilon)$ ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\epsilon) + \eta'(u^\epsilon)f'(u^\epsilon)\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} - \epsilon\eta'(u^\epsilon)\frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} = 0$$

ce qui donne après calcul en introduisant la fonction $\zeta = \zeta(u) = \int^u \eta'(v)f'(v)dv$, i.e. $\zeta' = \eta' f'$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x}\zeta(u^\epsilon) - \epsilon\frac{\partial}{\partial x}(\eta'(u^\epsilon)\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x}) = -\epsilon\eta''(u^\epsilon)(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x})^2$$

Remarque : Si u^ϵ est solution du problème (3), si η est convexe régulière ($\eta'' > 0$), si ζ est définie par $\zeta' = \eta' f'$, alors : $\zeta' = \eta' f'$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x}\zeta(u^\epsilon) - \epsilon\frac{\partial}{\partial x}(\eta'(u^\epsilon)\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x}) \leq 0$$

Mais que se passe t-il su point de vue des solutions faibles ? On espère que si $\epsilon \longrightarrow 0$ alors $u^\epsilon \longrightarrow u$, avec u solution faible de (1). On prend alors $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$ et on va regarder ce que donne la forme faible de l'équation précédente.

Soit $\phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$ tel que $supp(\phi) \subset \mathbb{R} \times [0,\infty[$. En multipliant par ϕ et en intégrant sur $\mathbb{R} \times [0,\infty[$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty[} \phi * (\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x}\zeta(u^\epsilon) - \epsilon\frac{\partial}{\partial x}(\eta'(u^\epsilon)\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x}))dxdt = -\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty[} (\frac{\partial\phi}{\partial t}\eta(u^\epsilon) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\zeta(u^\epsilon) - \epsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\eta(u^\epsilon))dxdt$$

Proposition 17. *Soit u^ϵ solution de* (3)*, $\epsilon > 0$, η convexe régulière, $\eta'' > 0$, $\zeta' = \eta' f'$, alors $\forall\phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$, $\phi \geq 0$ on a :*

$$\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty[} (\frac{\partial\phi}{\partial t}\eta(u^\epsilon) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\zeta(u^\epsilon) + \epsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\eta(u^\epsilon))dxdt \geq 0$$

Hyp : On suppose $u^\epsilon \longrightarrow u$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$ i.e. $\forall K$ compact de $\mathbb{R}\times[0,\infty[$

$$\sup_K |u^\epsilon - u| \longrightarrow 0 \qquad si\ \ \epsilon \longrightarrow 0$$

On a le résultat suivant :

1. u est solution faible de $(1)-(2)$
2. $\forall \phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$, $\phi \geq 0$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty[} (\frac{\partial \phi}{\partial t}\eta(u^\epsilon) + \frac{\partial \phi}{\partial x}\zeta(u^\epsilon) \geq 0$$

Preuve : Montrons le **2)** :

Soit ϕ fixé. Montrons que on a la convergence suivante dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$:

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int \frac{\partial \phi}{\partial t}\eta(u^\epsilon)dxdt = \int \frac{\partial \phi}{\partial t}\eta(u)dxdt$$

On note $K = supp(\phi)$. On sait déjà que u^ϵ tend vers u dans $L^\infty(K)$. La suite u^ϵ est donc convergente donc bornée. Donc $\exists M > 0$ tel que $\|u^\epsilon\|_{L^\infty} leqM$ donc on a $|u^\epsilon(x)| \leq M\ p.p.x.$ On a aussi le fait que u^ϵ retoune des valeurs dans un borné que l'on peut noter $[-M,+M]$ qui se trouve être un fermé donc un compact. Ainsi η est continue et prend ces valeurs dans un compact, elle retourne donc un compact, $\eta([-M,+M])$ est compact donc borné donc il existe $C_M > 0$ tel que $\forall u^\epsilon \in [-M,+M]$ on a $|\eta(u^\epsilon)| \leq C_M$

Donc le terme sous l'intégrale rest bornée uniformément indépendemment de ϵ. On applique le théorème de convergence dominé ce qui permet de faire passer la limite sous le signe somme. Ensuite on utilise le fait que η est continue pour dire que $\eta(u^\epsilon) \longrightarrow \eta(u)$

On a donc bien le résultat de convergence que l'on voulait. Il en est de même pour les deux autres termes :

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int \frac{\partial \phi}{\partial x}\zeta(u^\epsilon)dxdt = \int \frac{\partial \phi}{\partial x}\zeta(u)dxdt$$

et :

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\eta(u^\epsilon)dxdt = \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\eta(u)dxdt$$

Donc à la limite on a :

$$\int [\frac{\partial \phi}{\partial t}\eta(u) + \frac{\partial \phi}{\partial x}\zeta(u)]dxdt \geq 0$$

Montrons le **1)** :

On a u^ϵ solution de (3) et u^ϵ tend vers u dans L^∞_{loc}. Montrons que u est solution faible de $(1)-(2)$:

Soit $\phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$, on multiplie l'équation (3) par ϕ et on intègre sur le domaine $\mathbb{R}\times[0,\infty[$ contenant le support de ϕ. On sait tout d'abord que ϕ est nulle sur $\partial(supp(\phi))$ si $t > 0$. Par contre si $t = 0$ ϕ est à considérer à priori non nulle.

On a donc l'équation faible :

$$I = \int [\frac{\partial u^\epsilon}{\partial}\phi + \frac{\partial}{\partial x}f(u^\epsilon)\phi - \epsilon\frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2}\phi] = 0$$

en intégrant par partie selon que la variable de dérivation soit t ou x on obtient des termes à intégrer sur le bord de ϕ. Ce qui reste alors comme intégrale sur le bord est, compte tenu que ϕ est à priori non nulle lorsque $t = 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} -\phi(x,0)u_0(x)dx$$

On a donc :

$$I = \int_{\mathbb{R}} -\phi(x,0)u_0^\epsilon(x)dx - \int_{\mathbb{R}\times[0,\infty[} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t)u^\epsilon(x,t)dxdt - \int_{\mathbb{R}\times[0,\infty[} \epsilon u^\epsilon(x,t)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,t)dxdt$$

On veut ensuite passer à la limite. Le théorème de convergence dominé utilisé de la même manière que dans des calculs précédent nous permet le passage à la limite et les continuité des fonctions permettant d'obtenir finalement le résultat voulu :

$$\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty[} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t)u(x,t)dxdt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0)u_0(x)dx = 0$$

■

Donc si l'on se borne aux solutions faible de $(1)-(2)$ qui sont limites de perturbations visqueuses de (1) on a :

$u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$, $u_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ et $\forall \phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$:

$$\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty[} [\frac{\partial \phi}{\partial t}u + \frac{\partial \phi}{\partial x}f(u)]dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0)dx = 0$$

en regardant faiblement l'équation de départ (1).

4.2 Définitions et théorème

On va définir ici différentes notions relatives à l'entropie mathématique.

Définition 6. *Une entropie mathématique pour la loi de conservation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

est une fonction η convexe régulière ($\eta'' \geq 0$) tel que $\exists \zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (flux d'entropie) tel que :

$$\zeta' = \eta' f'$$

Remarque 1. *Toute fonction convexe régulière est une entropie mathématique.*

Remarque 2. *Il faut différencier le cas scalaire énoncé plus haut, du cas vectorielle ou la relation vérifiée par ζ, η et f est différente.*

Définition 7. *On dit que u est solution faible entropique du problème de Cauchy $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$, $u_0(x) = u(x,0) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ lorsque :*

1. *u est solution faible*
2. *$\forall \eta$ entropie de flux associée ζ on a $\forall \phi \geq 0$, $\phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$,* ***l'inégalité faible d'entropie*** *suivante :*

$$\int [\frac{\partial \phi}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \zeta(u)] dxdt \geq 0$$

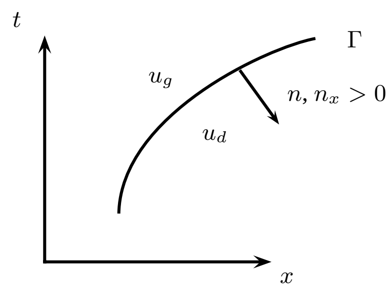
Théorème 2. ***(Krûlov-Volpère (1970))*** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ régulière, $u_0 \in L^\infty$ (L^∞ mieux que $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$), alors le problème de Cauchy $(1) - (2)$ a une unique solution faible entropique $u = u(x,t)$, $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, infty[)$ tel que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, infty[)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$*

De plus si $\alpha \leq u_0 \leq \beta$ alors p.p.x $\alpha \leq u(x,t) \leq \beta$

4.3 Inégalité de saut d'entropie

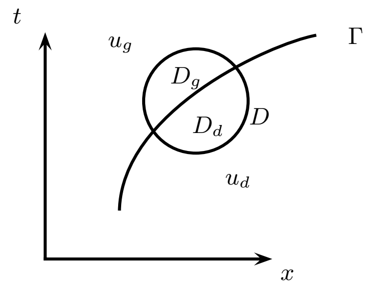
Soit u de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux qui donne comme contrainte l'inégalité d'entropie faible. Si u est régulière de part et d'autre de Γ, discontinue le long de Γ alors on dit que u est **solution faible** lorsque :
- u solution classique hors de Γ
- $[f(u)] = \sigma[u]$ sur Γ

On dit que u est **solution faible entropique** lorsque :
- u solution faible
- Inégalité de Rankine Hugoniot vérifiée



Exhibons cette ingalité :
On a le résultat suivant :
$\forall \phi \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$, $\phi \geq 0$, $\forall (\eta, \zeta)$ couple (entropie, flux d'entropie)

$$\int \int [\frac{\partial \phi}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \zeta(u)] \geq 0$$



On a :

$$I = \int_D [\frac{\partial \phi}{\partial t}\eta(u) + \frac{\partial \phi}{\partial x}\zeta(u)] \geq 0$$

On sépare l'intégrale en deux sur D_g et D_d et on intègre par partie, il reste :

$$I = -\int_{D_g} \frac{\partial \eta}{\partial t}\phi + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\phi + \int_{\partial D_g} \phi[n_t\eta + n_x\zeta] - \int_{D_d} \frac{\partial \eta}{\partial t}\phi + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\phi + \int_{D_d} \phi[\tilde{n}_t\eta + \tilde{n}_x\zeta]$$

avec $\tilde{n} = -n$

On a la loi de conservation supplémentaire suivante sur D_g et D_d :

$$\phi[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}] = 0$$

et les intégrales sur les bords se limitent à des intégrales sur Γ, il reste donc :

$$I = \int_\Gamma \phi[n_t\eta(u_g) + n_x\zeta(u_g)] + \int_\Gamma \phi[\tilde{n}_t\eta(u_d) + \tilde{n}_x\zeta(u_d)]$$

en notant $\eta_g = \eta(u_g)$... et avec $n_t + \sigma n_x = 0$ on a :

$$I = \int_\Gamma \phi n_x[-\sigma\eta_g + \zeta_g + \sigma\eta_d - \zeta_d] \geq 0$$

et comme $\phi \geq 0$ et $n_x \geq 0$ on a **l'inégalité de R.H.** :

$$\zeta_d\zeta_g \leq \sigma[\eta_d - \eta_g]$$

Exemple 1 : Burgers avec $u_g = 0$ et $u_d = 1$. On prend $\eta(u) = \frac{u^2}{2}$. On a alors $\zeta(u) = \frac{u^3}{3}$ par exemple. L'inégalité de R.H. n'est pas vérifié on a $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{4}$

Donc l'onde de choc introduite précédemment ne satisfait pas l'inégalité d'entropie.

Exemple 2 : Burgers avec $u_g = 1$ et $u_d = 0$. Ona l'inégalité de R.H. vérifiée : $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{4}$.

Proposition 18. *Soit f strictement convexe, l'ingalité de R.H. est équivalente à :*

$$u_g \geq u_d$$

ou bien équivanlente encore à :

$$f'(u_g) > \sigma > f'(u_d)$$

Preuve :

A faire en exercice.

■

Chapitre 5

Equation de St Venant

Chapitre 6

Ondes de détentes

Chapitre 7

Ondes de chocs

Chapitre 8

Problème de Rienmann