Eppur si muove !

Institut Galilée

UNIVERSITÉ PARIS 13 NORD

Introduction aux systèmes hyperboliques non linéaires

Villetaneuse, 2005

Cours 01

Equations de Saint-Venant

- Introduction
- Systèmes de lois de conservation
- Hyperbolicité
- Invariance par rotation
- Entropie mathématique

François Dubois

mars 2005, 24 pages

Equations de Saint Venant

F. Dubois, mars 2005

1) Introduction

• Nous notons (x,y) les coordonnées d'un point d'un espace euclidien bidimensionnel, t le temps. Les équations de Saint-Venant consistent à trouver des fonctions $\rho(x,y,t)$ et $(u(x,y,t), v(x,y,t))$ de sorte que

$$(1.1)\quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho u v\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho u v\\ \rho v^2+p\end{pmatrix} = 0$$

La première équation du système (1.1) exprime la conservation de la masse et les deux dernières la conservation de la quantité de mouvement (ou de l'impulsion).

• On dispose de trois équations scalaires, de quatre inconnues (ρ, u, v, p) ; il convient donc pour fermer le problème de rajouter une équation. On introduit deux constantes $K>0$ et $\gamma>0$ et on suppose a priori

$$(1.2)\quad p = K\rho^\gamma \,,\ K>0,\ \gamma>1.$$

La relation (1.2) est une loi de comportement. Elle relie a priori la grandeur ρ, qui est en conséquence positive pour que ρ^γ ait un sens :

(1.3) $\qquad \rho \geqslant 0$.

- L'interprétation physique de (1.1)(1.2) est possible pour deux configurations assez distinctes. D'une part, les équations (1.1) décrivent l'évolution bidimensionnelle d'un gaz isentropique pour un domaine bidimensionnel. La grandeur ρ est alors la masse volumique, et (u, v) représentent les deux composantes de la vitesse. La grandeur p est alors la pression et γ est le rapport C_p/C_v des chaleurs spécifiques du gaz. L'extension à trois dimensions d'espace du système (1.1) ne pose aucune difficulté. C'est elle qui est effectivement utile pour certaines applications. D'autre part, le système (1.1) modélise le comportement d'un fluide incompressible (de l'eau) dans un récipient, une rivière, un port, ... La hauteur d'eau est alors représentée par ρ, la vitesse bidimensionnelle moyenne intégrée sur la hauteur vaut (u, v), et p peut encore s'interpréter comme une pression. Par contre,

$\gamma = 2$ pour ce modèle dit des "eaux peu profondes".

2) Système de lois de conservation.

- On introduit le vecteur W des inconnues :

(2.1) $\quad W = (\rho,\ q \equiv \rho u,\ r \equiv \rho v)^t$

et compte tenu de (1.2), on vérifie sans problème que le système (1.1) prend la forme

(2.2) $\quad \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(W) + \dfrac{\partial}{\partial y} g(W) = 0$

où $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont des vecteurs fonction de W.
En effet,

$\rho u = q$, $\quad \rho u^2 + p = \frac{1}{\rho}(\rho u)^2 + p = \frac{q^2}{\rho} + K\rho^\gamma$, $\quad \rho u v = \frac{q \cdot r}{\rho}$,
$\rho v^2 + p = \frac{1}{\rho}(\rho v)^2 + p = \frac{1}{\rho} r^2 + K\rho^\gamma$, $\quad \rho v = r$. Donc

(2.3) $\quad f(W) \equiv \begin{pmatrix} q \\ \dfrac{q^2}{\rho} + K\rho^\gamma \\ \dfrac{1}{\rho} q r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \end{pmatrix}$

(2.4) $\quad g(W) \equiv \begin{pmatrix} r \\ \dfrac{1}{\rho} q r \\ \dfrac{r^2}{\rho} + K\rho^\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}.$

- Le système (2.2) est "sous forme divergente"; il s'écrit comme la divergence dans l'espace-temps d'un certain vecteur des inconnues W. On parle pour cette raison d'un <u>système de lois de conservation</u>. Il importe de se rappeler que ces lois de conservations ont un <u>sens physique</u> très précis, et qu'on ne peut pas <u>modifier</u> l'écriture conservative du système sans modifier "implicitement" la physique, ce qui n'est pas de mise si on a une approche de "modélisation mathématique".

- On peut par contre développer la dérivation par rapport à x de la fonction composée $x \mapsto W(x,y,t)$; $W \mapsto f(W)$, introduire la jacobienne $A(W) \equiv df(W)$ du champ de vecteurs $f(\cdot)$ ($A(W)$ est donc une matrice 3 par 3 pour le système de Saint Venant), faire de même pour l'autre <u>flux</u> $g(\cdot)$: $B(W) \equiv dg(W)$, et réécrire la relation (2.2) "sous forme non conservative" :

$$(2.5) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + A(W)\,\frac{\partial W}{\partial x} + B(W)\frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

3) <u>Hyperbolicité</u>

- On dit qu'un système tel que (2.5) est <u>hyperbolique</u>

si quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$ et quel que soit W, la matrice $D(\theta, W)$ défini par

(3.1) $$D(\theta, W) \equiv \cos\theta \; A(W) + \sin\theta \; B(W)$$

est diagonalisable sur le corps des réels. Il existe donc des valeurs propres réelles $\lambda_j(\theta, W)$ et des vecteurs propres "réels" $r_j(\theta, W)$ de sorte que

(3.2) $$D(\theta, W) \cdot r_j(\theta, W) = \lambda_j(\theta, W)\, r_j(\theta, W), \; r_j \neq 0 .$$

Une propriété remarquable de l'hyperbolicité est qu'elle est <u>invariante par changement de fonction inconnue</u>. C'est l'objet de la proposition qui suit.

<u>Proposition</u> 1 L'hyperbolicité est invariante par changement de fonction inconnue.

- Soit $W \mapsto V = \mathcal{V}(W)$ un changement de fonction inconnue bi-univoque et dérivable, ainsi que son inverse $V \mapsto W = \mathcal{W}(V)$. Alors on peut écrire l'évolution du syst vecteur V sous la forme

(3.3) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A}(V) \frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{B}(V) \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

et ce système est hyperbolique : la matrice $\tilde{D}(\theta, V) \equiv \cos\theta \, \tilde{A}(V) + \sin\theta \, \tilde{B}(V)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
De plus $D(\theta, W)$ et $\tilde{D}(\theta, V)$ ont mêmes valeurs

propres : la j^e valeur propre $\tilde{\lambda}_j(\theta,V)$ de $\tilde{D}(\theta,V)$ vérifie

$$(3.4) \qquad \tilde{\lambda}_j(\theta,V) = \lambda_j(\theta, \mathcal{W}(V)),$$

où $\lambda_j(\theta,W)$ a été introduit à la relation (3.2).

Preuve de la proposition (1)

- Comme le changement de fonction inconnue est bijectif et bi-régulier, la jacobienne $\frac{\partial w}{\partial v} = d\mathcal{W}(V)$ est une matrice inversible. On pose

$$(3.5) \qquad T(V) = \frac{\partial w}{\partial v} = d\mathcal{W}(V), \quad \text{inversible}.$$

On pose donc $W = \mathcal{W}(V)$ au sein de la relation (2.5) et on dérive les fonctions composées $t \mapsto V(x,y,t)$ et $V \mapsto \mathcal{W}(V)$. Il vient sans difficulté

$$T(V)\frac{\partial v}{\partial t} + A(W).T(V).\frac{\partial v}{\partial x} + B(W).T(V).\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

c'est à dire la relation (3.3) avec

$$(3.6) \qquad \tilde{A}(V) = T(V)^{-1}.A(\mathcal{W}(V)).T(V), \quad \tilde{B}(V) = T(V)^{-1}.B(\mathcal{W}(V)).T(V)$$

- On déduit de (3.6) et (3.1) que les matrices $D(\theta,W)$ et $\tilde{D}(\theta,V)$ sont conjuguées (ou semblables) :

$$(3.7) \qquad \tilde{D}(\theta,V) = T(V)^{-1}.D(\theta,W).T(V), \quad W = \mathcal{W}(V).$$

Elles ont donc mêmes valeurs propres et $\tilde{D}$ est diagonalisable dès que D l'est. Soit λ_j, r_j une valeur propre et un vecteur propre de D. Ils satisfont à la relation (3.2) et de plus la famille $(r_j)_j$ est une base. On a le calcul suivant :

$$\lambda_j r_j = D \cdot r_j = D \cdot T \cdot (T^{-1} r_j)$$

donc après multiplication par la matrice T^{-1} à gauche, il vient

$\tilde{D}(T^{-1} r_j) = \lambda_j (T^{-1} r_j)$, ce qui montre que $(T^{-1} r_j)$ (qui est non nul car r_j est non nul et T^{-1} est bijective) est vecteur propre de $\tilde{D}$ de valeur propre λ_j. Par suite la famille $(T^{-1} r_j)_j$ forme une <u>base de vecteurs propres</u> car T^{-1} est bijective. $\square$

- Nous utilisons la proposition précédente pour montrer que les équations de Saint Venant forment un système <u>hyperbolique</u> de lois de conservation. Au lieu d'expliciter les matrices $A(W)$ et $B(W)$ (ce qui constitue un très bon exercice laissé au lecteur), nous utilisons d'autres variables inconnues V afin de montrer la $\mathbb{R}$-diagonalisabilité de $\tilde{D}(\theta, V)$ à moindre frais.

<u>Proposition</u> 2 Forme non conservative des équations de Saint Venant.

- On introduit l'ensemble

$$(3.8) \quad \Omega = \{(\rho, q, r)^t \in \mathbb{R}^3, \ \rho > 0\}$$

et pour $W \in \Omega$, on pose

(3.9) $$V = \left(\rho, \; u \equiv \frac{q}{\rho}, \; v \equiv \frac{r}{\rho}\right)^t .$$

On introduit aussi la <u>dérivée convective</u> (ou de Lagrange)

(3.10) $$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

où $\vec{u} \equiv (u, v)$ représente l'ensemble du champ de vitesse. Les équations de Saint Venant (1.1) peuvent se réécrire sous la forme compacte

(3.11) $$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

(3.12) $$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla p = 0 .$$

<u>Preuve de la proposition 2</u>

- C'est un calcul classique. On part de l'équation de conservation de la masse

(3.13) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

et on développe la dérivée du produit avec la règle de Leibniz. Il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \, , \text{ soit}$$

(3.14) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) \rho + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 ,$$

relation identique à (3.11) aux notations près.

- on procède de même avec la première équation de conservation de l'impulsion

$$(3.15)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u v)=0$$

en prenant soin d'écrire $\rho u^2=\rho u\cdot u$ et $\rho u v=\rho v\cdot u$ dans l'emploi de la règle de Leibniz. Il vient

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$=\rho\Big(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\Big)u+u\Big[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\Big]+\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

Donc

$$(3.16)\qquad \rho\Big(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\Big)u+\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

en utilisant la relation (3.13) de conservation de la masse. La relation (3.16) exprime très exactement la première composante de la relation (3.12). L'explicitation de la seconde composante est laissée au lecteur. $\boxed{}$

- Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'hyperbolicité du système de Saint Venant (1.1). On réécrit simplement les équations non conservatives (3.11)(3.12) sous la forme générale (3.3), en introduisant la <u>célérité des ondes</u> $c(W)$ via la relation

$$(3.17)\qquad c(W)=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}=\sqrt{K\rho^{\gamma-1}}.$$

on note la relation classique

$$(3.18) \qquad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \, .$$

On a sans difficulté

$$(3.19) \quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho_0} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & 0 & \rho \\ 0 & v & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

ce qui permet d'expliciter la matrice $\tilde{D}(\theta, V)$ introduite à la proposition 1 :

$$(3.20) \quad \tilde{D}(\theta, V) \equiv \cos\theta \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho_0} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} v & 0 & \rho \\ 0 & v & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & v \end{pmatrix} .$$

<u>Proposition</u> 3 Hyperbolicité des équations de Saint Venant

Le système (1.1) des équations de Saint Venant est hyperbolique lorsqu'on cherche la fonction inconnue $W(x,y,t)$ dans l'ouvert Ω défini à la relation (3.8) $[\rho > 0]$. Pour une direction $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ et on pose

$$(3.21) \qquad \vec{u}\cdot\vec{n} \equiv u\cos\theta + v\sin\theta \, .$$

Les valeurs propres relativement à une direction θ s'écrivent

$$(3.22) \quad \lambda_2(\theta, W) = \vec{u}\cdot\vec{n} - c < \lambda_2(\theta, W) = \vec{u}\cdot\vec{n} < \lambda_3(\theta, W) = \vec{u}\cdot\vec{n} + c \, .$$

<u>Preuve de la proposition (3)</u>

- On calcule la matrice $\tilde{D}(\theta,V)$ introduite en (3.20):

$$(3.23) \qquad \tilde{D}(\theta,V) = \begin{pmatrix} \vec{u}\cdot\vec{n} & \rho\cos\theta & \rho\sin\theta \\ \frac{c^2}{\rho}\cos\theta & \vec{u}\cdot\vec{n} & 0 \\ \frac{c^2}{\rho}\sin\theta & 0 & \vec{u}\cdot\vec{n} \end{pmatrix}$$

et on a

$$\begin{aligned} \det(\tilde{D}-\lambda I) &= (\vec{u}\cdot\vec{n}-\lambda)^3 - (\vec{u}\cdot\vec{n}-\lambda)(c^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta) \\ &= (\vec{u}\cdot\vec{n}-\lambda)\left[(\vec{u}\cdot\vec{n}-\lambda)^2 - c^2\right] \\ &= (\vec{u}\cdot\vec{n}-\lambda)(\vec{u}\cdot\vec{n}+c-\lambda)(\vec{u}\cdot\vec{n}-c-\lambda) \end{aligned}$$

ce qui établit l'expression (3.22) des valeurs propres.

- Comme les trois valeurs propres sont <u>distinctes</u> puisque $c^2>0$ (vu que $\rho>0$ compte tenu de la relation (3.18)) les trois vecteurs propres correspondants $\tilde{r}_j(\theta,V)$ sont indépendants et forment en conséquence une <u>base</u> de $\mathbb{R}^3$, ce qui achève de montrer la propriété. $\square$

4) Invariance par rotation

- La propriété physique d'invariance des équations par rotation est fondamentale pour la mise en œuvre numérique. Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$, T un temps >0 et

$$(4.1) \qquad X \times [0,T] \ni (x,y,t) \longmapsto W(x,y,t) \in \Omega$$

une solution (régulière) des équations de Saint Venant. On "tourne" l'espace $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'une rotation R_θ d'angle θ :

$$(4.2) \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

- Pour $(x',y') \in R_\theta X \equiv X'$, on dispose de $(x,y) \in X$, donc de $W(x,y,t) \in \Omega$. On décide alors de "tourner" l'état W en effectuant sur le champ de vitesse $\vec{u}$ la rotation R_θ :

$$(4.3) \qquad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \equiv R_\theta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \, u - \sin\theta \, v \\ \sin\theta \, u + \cos\theta \, v \end{pmatrix} .$$

On utilise cette rotation R_θ pour fabriquer une rotation $\widetilde{R}_\theta$ d'un vecteur $\Phi \in \mathbb{R}^3$:

$$(4.4) \qquad \widetilde{R}_\theta \begin{pmatrix} \rho \\ \xi \\ \varsigma \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \rho \\ R_\theta \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

en ne changeant pas la première composante et en faisant tourner les deux dernières.

On a alors une première propriété d'invariance du flux par rotation :

Proposition (4) Invariance du flux des équations de Saint Venant par rotation.

Soit $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^3$ et $\Omega \ni W \mapsto g(W) \in \mathbb{R}^3$ les deux composantes du flux (f, g) des équations de Saint Venant, définies aux relations (2.3) et (2.4). Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $W \in \Omega$, on pose

$$(4.5) \quad \phi(\theta, W) \equiv \cos\theta \, f(W) + \sin\theta \, g(W) .$$

On a alors

$$(4.6) \quad \phi(\theta, W) = \tilde{R}_\theta \, f(\tilde{R}_{-\theta} W) .$$

Preuve de la proposition (4)

- Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $W = (\rho, \rho u, \rho v)^t \in \Omega$, l'état $\tilde{R}_{-\theta} W$ a pour densité ρ et pour vitesse

$$(4.7) \quad \left(u_n \equiv \cos\theta \, u + \sin\theta \, v \, , \; v_n \equiv -\sin\theta \, u + \cos\theta \, v \right) .$$

On a donc

$$\tilde{R}_\theta \, f(\tilde{R}_{-\theta} W) = \tilde{R}_\theta \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho u_n v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho u_n \\ R_\theta \begin{pmatrix} \rho u_n^2 + p \\ \rho u_n v_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} . \quad \text{or}$$

$$R_\theta \begin{pmatrix} \rho u_n^2 + p \\ \rho u_n v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho u_n^2 + p \\ \rho u_n v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\theta\, u_n - \sin\theta\, v_n)\rho u_n + p\cos\theta \\ (\sin\theta\, u_n + \cos\theta\, v_n)\, \rho v_n + p\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho u\,(\cos\theta\, u + \sin\theta\, v) + p\cos\theta \\ \rho v\,(\cos\theta\, u + \sin\theta\, v) + p\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \cos\theta \begin{pmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho u v \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} \rho u v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}$$

- Donc

$$\tilde{R}_\theta\, f(\tilde{R}_{-\theta} W) = \cos\theta \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}$$

ce qui démontre la propriété. $\square$

- On peut ensuite s'intéresser à la fonction

$$\text{P(4.8)} \quad R_\theta X \times [0,T] \ni (x', y', t) \mapsto \tilde{R}_\theta \left(W\left(R_{-\theta} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, t \right) \right) \in \Omega$$

obtenue en "tournant" d'un angle θ le vecteur W solution de (1.1). Alors la fonction $\tilde{W}(x', y', t)$ définie par (4.8) est solution des équations de Saint Venant.

<u>Proposition (5)</u> Invariance par rotation de la solution des équations de Saint-Venant.

Soit (4.1) une solution des équations de Saint Venant, R_θ une rotation définie par (4.2) et $\widetilde{R}_\theta$ son extension à l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ introduite en (4.4). Pour $(x', y') \in R_\theta X$ et $t \in [0, T]$, on pose

$$(4.9) \qquad \widetilde{W}(x', y', t) \equiv \widetilde{R}_\theta \, W(x, y, t) \;, \; \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Alors $R_\theta X \times [0, T] \ni (x', y', t) \mapsto \widetilde{W}(x, y, t) \in \Omega$ est solution des équations de Saint-Venant :

$$(4.10) \qquad \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} f(\widetilde{W}) + \frac{\partial}{\partial y'} g(\widetilde{W}) = 0$$

<u>Preuve de la proposition (5)</u>

- On commence par exprimer $\frac{\partial}{\partial x'}$ et $\frac{\partial}{\partial y'}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$. On tire de (4.2) :

$$(4.11) \begin{cases} x = \cos\theta \, x' + \sin\theta \, y' \\ y = -\sin\theta \, x' + \cos\theta \, y' \end{cases}$$

et on a

$$(4.12) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x'} \equiv \dfrac{\partial x}{\partial x'} \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial x'} \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y'} \equiv \dfrac{\partial x}{\partial y'} \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y'} \dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

Donc

$$(4.13) \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \;, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

- On établit ensuite la première équation de (4.10) [conservation de la masse]. Rappelons d'abord que l'état $\tilde{W}$ a une vitesse $\vec{u}\,'$ donnée par les relations (4.3). On a alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho u') + \frac{\partial}{\partial y'}(\rho v') = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}\right]\Big(\rho u \cos\theta$$
$$- \rho v \sin\theta\Big) + \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}\right]\left(\rho u \sin\theta + \rho v \cos\theta\right)$$
$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \left(-\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial y}(\rho u)$$
$$+ \left(-\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)$$
$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad \text{en vertu de } (3.13).$$

- Pour la première équation de l'impulsion, on utilise le calcul fait pour la proposition 2 et qui utilise explicitement la conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u') + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho u'^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y'}(\rho u' v') =$$
$$= u'\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'}(\rho u') + \frac{\partial}{\partial y'}(\rho v')\right) + \rho\left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) + \frac{\partial p}{\partial x'}.$$
$$= \rho\left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) + \frac{\partial p}{\partial x'}.$$

Or $$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} = (u\cos\theta - v\sin\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u\cos\theta - v\sin\theta)$$
$$= (u\cos\theta - v\sin\theta)\left[\cos^2\theta\frac{\partial u}{\partial x} - \sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} - \sin\theta\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x} + \sin^2\theta\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

De même,

$$v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = (u\sin\theta + v\cos\theta)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u\cos\theta - v\sin\theta)$$
$$= (u\sin\theta + v\cos\theta)\left[\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \cos^2\theta\frac{\partial u}{\partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial v}{\partial x} - \sin\theta\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

- Par sommation des deux expressions précédentes,

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = \cos\theta\, u\frac{\partial u}{\partial x} - \sin\theta\, u\frac{\partial v}{\partial x} + \cos\theta\, v\frac{\partial u}{\partial y} - \sin\theta\, v\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= \cos\theta\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \sin\theta\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

On en déduit :

$$\rho\left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) + \frac{\partial p}{\partial x'} = \rho\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial t} - \sin\theta\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$
$$+\rho\cos\theta\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \rho\sin\theta\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\cos\theta\frac{\partial p}{\partial x} - \sin\theta\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$
$$= \cos\theta\left[\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\right] - \sin\theta\left[\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho u\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\right]$$

$= 0$ compte tenu des équations de conservation de l'impulsion pour le champ $W(\bullet)$.

- La preuve pour la seconde équation de conservation de l'impulsion est analogue. Elle est laissée au lecteur. $\square$

5) Entropie mathématique

- Nous revenons à la forme initiale des équations de Saint-Venant. Nous allons construire une fonction $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ et deux fonctions de flux correspondants $\Omega \ni W \mapsto \xi(W) \in \mathbb{R}$ et

$\Omega \ni W \mapsto \zeta(W) \in \mathbb{R}$ de sorte de disposer d'une <u>loi de conservation supplémentaire</u>

$$(5.1) \quad \frac{\partial}{\partial t}\eta(W) + \frac{\partial}{\partial x}\xi(W) + \frac{\partial}{\partial y}\zeta(W) = 0$$

pour toute solution régulière $X \times [0,T] \ni (x,y,t) \mapsto W(x,y,t) \in \Omega$ de l'équation de Saint Venant (1.1).
Nous allons procéder en deux étapes, en remarquant d'abord que la dérivée de Lagrange par rapport au temps satisfait à la règle de Leibniz :

$$(5.2) \quad \frac{d}{dt}(\varphi\psi) = \varphi\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\psi$$

pour des champs $\varphi(\cdot)$ et $\psi(\cdot)$ arbitraires et $\frac{d}{dt}$ défini à la relation (3.10).

- On introduit d'abord l'<u>énergie interne</u> $e(\rho)$ par la relation

$$(5.3) \quad de \equiv -p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2}\, d\rho$$

compte tenu de la loi de pression (1.2), on peut choisir $e(\rho)$ selon

$$(5.4) \quad e = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{K}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}$$

on introduit ensuite l'<u>énergie totale spécifique</u> E par

$$(5.5) \quad E \equiv e + \frac{1}{2}(u^2+v^2).$$

Proposition ⑥ Transport de l'énergie totale

Soit $W(\bullet)$ une solution régulière du système de Saint Venant. On a, avec les définitions proposées plus haut

$$(5.6) \qquad \rho \frac{dE}{dt} + \mathrm{div}(p\vec{u}) = 0 .$$

Preuve de la proposition ⑥

• C'est un simple calcul issu de (3.11).(3.12) et (5.3) :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{de}{dt} + \vec{u}\,\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{p}{\rho^2}\,\frac{d\rho}{dt} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= -\frac{p}{\rho}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \left(-\frac{1}{\rho}\,\nabla p\right) = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}(p\vec{u}) . \qquad \square$$

• Nous pouvons réécrire la relation (5.6) "sous forme conservative", en introduisant

$$(5.7) \qquad \eta(W) \equiv \rho e + \frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 = \rho e + \frac{1}{2}\,\frac{q^2+r^2}{\rho}$$

$$(5.8) \quad \begin{cases} \xi(W) = \eta\, u + p u \\ \zeta(W) = \eta\, v + p v , \end{cases}$$

et nous avons

Proposition ⑦ Loi de conservation supplémentaire

Dans les mêmes conditions que pour la proposition ⑥, la relation (5.1) a lieu avec η, ξ, ζ donnés aux relations (5.7) et (5.8).

Preuve de la proposition (7)

- On a simplement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u E + p u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v E + p v) =$$

$$= \rho \frac{\partial E}{\partial t} + E \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial E}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} + E \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \operatorname{div}(p\vec{u})$$

$$= \rho \frac{dE}{dt} + E\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\right) + \operatorname{div}(p\vec{u})$$

$$= \rho \frac{dE}{dt} + \operatorname{div}(p\vec{u}) = 0 \qquad \square$$

- Nous remarquons que cette propriété a lieu car les fonctions η, ξ, ζ sont reliées à df et dg par

$$(5.9) \quad \begin{cases} d\xi(W) = d\eta(W) \cdot df(W) & , \ \forall W \in \Omega \\ d\zeta(W) = d\eta(W) \cdot dg(W) & , \ \forall W \in \Omega \end{cases}$$

comme le lecteur le vérifiera aisément. On a de plus une propriété intéressante.

Proposition (8) Stricte convexité

Soit $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ définie à la relation (5.7). Alors $\eta(\cdot)$ est une fonction strictement convexe de l'état W.

Preuve de la proposition (8)

- On pose

$$(5.10) \qquad \varphi(W) \equiv \frac{1}{2} \frac{q^2 + r^2}{\rho}$$

et on a

(5.11) $\quad \eta(W) = \varphi(W) + \frac{k}{\gamma-1}\rho^\gamma \; , \quad \rho>0, \; \gamma>1$

- On vérifie d'abord que φ est convexe (mais pas "strictement" convexe !). On évalue sa Hessienne $d^2\varphi$ sans difficulté :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = -\frac{q^2+r^2}{2\rho^2} \; , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{q}{\rho} \; , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{r}{\rho} \; ,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = \frac{q^2+r^2}{\rho^3} = \frac{1}{\rho}(u^2+v^2), \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} = -\frac{q}{\rho^2} = -\frac{u}{\rho} \; ,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial r} = -\frac{r}{\rho^2} = -\frac{v}{\rho} \; , \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = \frac{1}{\rho} \; , \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial r} = 0 \; ,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{\rho} \quad , \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial r} = -\frac{r}{\rho^2} = -\frac{v}{\rho} \, .$$

Donc

(5.12) $$d^2\varphi = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} u^2+v^2 & -u & -v \\ -u & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le calcul des valeurs propres de $d^2\varphi$ n'offre pas de difficulté :

$$\det\left(\rho\, d^2\varphi - \lambda\right) = \begin{vmatrix} u^2+v^2-\lambda & -u & -v \\ -u & 1-\lambda & 0 \\ -v & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(u^2+v^2-\lambda) - (1-\lambda)(u^2+v^2)$$

$$= (1-\lambda)\left[(u^2+v^2-\lambda)(1-\lambda) - (u^2+v^2)\right]$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - (u^2+v^2+1)\lambda\right)$$
$$= -\lambda(\lambda-1)\left(\lambda - (u^2+v^2+1)\right)$$

ce qui montre que les valeurs propres de $d^2\varphi$ sont positives ou nulles, donc que φ est convexe.

- Par ailleurs $]0,\infty[\ni \rho \mapsto \rho^\gamma \in]0,\infty[$ est strictement convexe dès que $\rho>0$ et $\gamma>1$. Donc $\eta(\cdot)$ est convexe comme somme de deux fonctions convexes. Nous montrons "à la main" qu'elle est strictement convexe en établissant l'implication

$$(5.13)\left\{\begin{array}{l}\left(\eta((1-\theta)W_1+\theta W_2) = (1-\theta)\,\eta(W_1)+\theta\,\eta(W_2) \quad \text{et } \theta\neq 0,1\right)\\ \quad\Longrightarrow\; W_1 = W_2\end{array}\right.$$

Soit $\theta\in]0,1[$, $W_1, W_2\in\Omega$ de sorte que

$$(5.14)\quad \eta\left((1-\theta)W_1+\theta W_2\right) = (1-\theta)\,\eta(W_1)+\theta\eta(W_2).$$

Or $\eta(\cdot)$ est somme des fonctions $\varphi(\cdot)$ et $\frac{p}{\gamma-1}$ qui sont elles-mêmes convexes :

$$(5.15)\quad \varphi((1-\theta)W_1+\theta W_2) \leq (1-\theta)\,\varphi(W_1)+\theta\varphi(W_2),\ 0\leq\theta\leq 1$$

$$(5.16)\quad \frac{K}{\gamma-1}\left((1-\theta)\rho_1+\theta\rho_2\right)^\gamma \leq \frac{K}{\gamma-1}\left[\theta\rho_1^{\,\gamma}+(1-\theta)\rho_2^{\,\gamma}\right],\ 0\leq\theta\leq 1$$

avec des notations évidentes. L'égalité (5.14) n'est possible, compte tenu de (5.11), que si le cas d'égalité a lieu pour (5.15) <u>et</u> (5.16). Par suite, si $0<\theta<1$, on a nécessairement $\rho_1=\rho_2=\rho$ car $\rho\mapsto\rho^\gamma$ est strictement convexe. Il reste à traiter le cas d'égalité pour $\varphi(\bullet)$, en utilisant cette remarque simplificatrice :

$$\varphi\big((1-\theta)W_1+\theta W_2\big)-(1-\theta)\varphi(W_1)-\theta\varphi(W_2)$$
$$=\frac{1}{2\rho}\Big[\big((1-\theta)q_1+\theta q_2\big)^2+\big((1-\theta)r_1+\theta r_2\big)^2-(1-\theta)(q_1^2+r_1^2)-\theta(q_2^2+r_2^2)\Big]$$
$$=-\frac{\theta(1-\theta)}{2\rho}\Big[(q_1-q_2)^2+(r_1-r_2)^2\Big]$$

qui est nul alors que $\theta(1-\theta)$ ne l'est pas. On en déduit que $q_1=q_2$, $r_1=r_2$, ie $W_1=W_2$ et l'implication (5.13) est établie. $\square$

- Une fonction strictement convexe $\Omega\ni W\mapsto\eta(W)\in\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux "flux" $\Omega\ni W\mapsto(\xi(W),\zeta(W))\in\mathbb{R}^2$ de sorte que les relations (5.9) aient lieu s'appelle une <u>entropie mathématique</u> pour le système hyperbolique (1.1). Nous avons donc établi que la fonction $\eta(\bullet)$ définie à la relation (5.7) est une entropie mathématique pour les équations de Saint-Venant.

D, 5/3/05.