



Introduction aux systèmes hyperboliques non linéaires

Villetaneuse, 2005

Cours 02

Introduction aux volumes finis

- Maillage bidimensionnel
- Cobord d'une arête
- Evolution des valeurs moyennes
- Méthode des lignes
- Flux numérique

François Dubois
mars 2005, 21 pages

Introduction aux volumes finis

1

mars 2005

1) Maillage bidimensionnel

- On suppose que D est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , à frontière polygonale, localement d'un seul côté de la frontière, ce qui permet de définir sous au l'origine la normale extérieure n pour presque tous les points x du bord $\partial D \equiv \Gamma$. L'hypothèse de frontière polygonale permet de recouvrir D (ou plus précisément l'adhérence \bar{D} de l'ouvert D) par les éléments triangulaires K d'un maillage \mathcal{T} (voir la figure),
- Sans faire une théorie mathématique complète des complexes simpliciaux, nous insistons ici sur quelques propriétés topologiques d'un tel maillage \mathcal{T} . Avant tout, un maillage est la donnée (dans le cas de deux dimensions) de trois ensembles \mathcal{T}^0 , \mathcal{T}^1 et \mathcal{T}^2 composés chacun

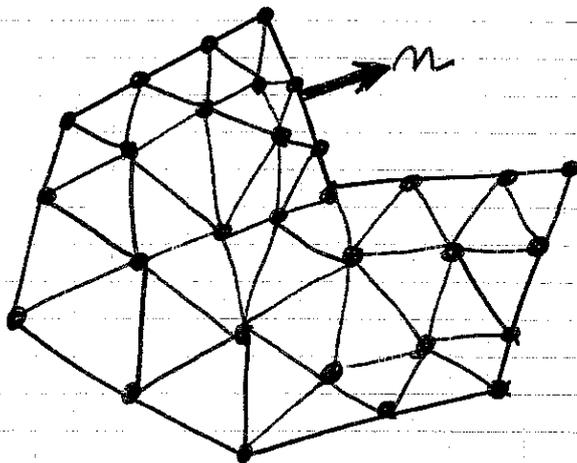


Figure 1. Recouvrement du domaine D par un maillage en triangles.

d'objets géométriques de dimension 0, 1 et 2 respectivement. L'ensemble \mathcal{T}^0 est constitué des sommets du maillage, connus par exemple par leurs coordonnées. La famille \mathcal{T}^1 est celle des arêtes, joignant deux sommets du maillage, mais pas tous les sommets entre eux ! Enfin, les éléments, des triangles dans l'exemple proposé ici, constituent l'ensemble \mathcal{T}^2 . Une telle composition a une structure mais permet aussi de la flexibilité géométrique pour recouvrir des domaines Ω de forme arbitraire.

- Les contraintes classiques pour qu'une famille de triangles constituent la famille \mathcal{T}^2 d'un maillage sont exprimées via l'intersection :

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } K \text{ et } L \text{ sont deux triangles du maillage,} \\ \overline{K \cap L} \text{ est soit vide, soit un sommet de } K \\ \text{et de } L, \text{ soit une arête de } K \text{ et de } L, \text{ soit} \\ K = L. \end{array} \right.$$

Ceci exclut des configurations comme celle de la figure 2 ou $K \cap L$ est un

sommet de L mais pas de K .

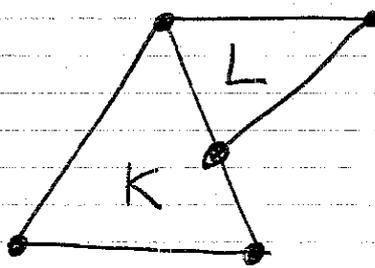


Figure 2 configuration interdite

- La structure de "complexe simplicial" d'un maillage permet de définir l'opérateur de bord ∂ pour les arêtes et pour les triangles. Si $a \in \mathcal{T}^1$ est une arête du maillage, on peut écrire

$$(1.2) \quad a =]S, N[, \quad S \in \mathcal{T}^0, \quad N \in \mathcal{T}^0$$

et le bord ∂a de l'arête a est constitué par les deux sommets S et N :

$$(1.3) \quad \partial a = \{S, N\}, \quad a \in \mathcal{T}^1, \quad \partial a \subset \mathcal{T}^0.$$

Si $K = (S, N, W) \in \mathcal{T}^2$ est un triangle du maillage, avec S, N, W sommets de ce maillage, c'est à dire

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} K = \{ \theta S + \gamma N + \xi W, \theta > 0, \gamma > 0, \xi > 0, \\ \theta + \gamma + \xi = 1 \} , \quad S, N, W \in \mathcal{T}^0, \end{array} \right.$$

on décide pour ce cas de définir son bord ∂K comme la réunion des trois arêtes $]S, N[,]N, W[$ et $]W, S[$:

$$(1.5) \quad \partial K = \{]S, N[,]N, W[,]W, S[\} \subset \mathcal{T}^1, \quad K \in \mathcal{T}^2.$$

- Il est utile d'orienter les arêtes $a \in \mathcal{T}^1$ du maillage \mathcal{T} . Choisir une orientation de l'arête $a = (S, N)$ consiste simplement à décider que

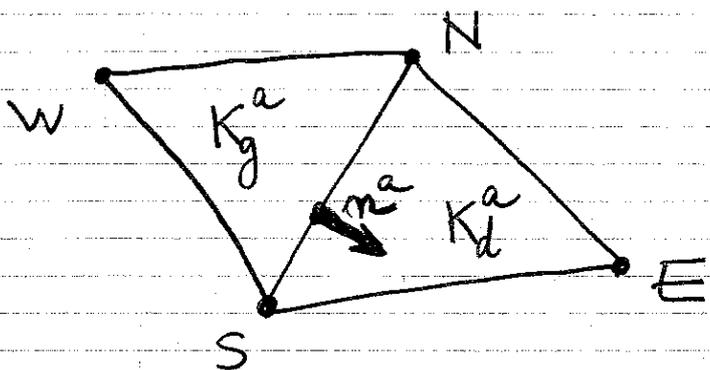


Figure 3. Arête $a =]S, N[$ orientée de S vers N. Son bord $\partial^c a$ est constitué par les deux triangles (S, N, W) et (N, S, E) . La normale n^a est extérieure à $K_g^a \equiv]S, N, W[$ et pointe vers l'intérieur de $K_d^a \equiv]N, S, E[$.



S est le "premier" sommet de l'arête (ou sommet de départ) et N le second, ou sommet d'arrivée ou alors de faire le choix opposé. Fixer une orientation de $a \in \mathcal{O}^1$ définit un vecteur tangent unitaire τ^a le long de l'arête. On peut alors introduire un vecteur normal $n^a \in \mathbb{R}^2$ de sorte que

$$(1.6) \begin{cases} (n^a, \tau^a) \text{ est une base directe de } \mathbb{R}^2, \\ a \text{ orientée par le vecteur tangent } \tau^a, a \in \mathcal{O}^1. \end{cases}$$

on renvoie à la figure 3 pour ces premiers éléments géométriques.

- Choisir une orientation pour les arêtes d'un maillage \mathcal{T} consiste à choisir une orientation pour chaque arête $a \in \mathcal{T}^1$; il y a donc $2^{\#\mathcal{T}^1}$ choix possibles! Pour les arêtes du bord, nous adoptons ici la convention que la normale n^a définie en (1.6) coïncide avec la normale n au domaine \mathbf{D} .

$$(1.7) \quad n^a = \text{normale extérieure à } \Omega, \\ a \in \mathcal{T}^1, a \subset \partial \mathbf{D}.$$

2) Cobord d'une arête.

- Nous avons vu que la notion de bord est très simple si on travaille avec un complexe simplicial \mathcal{T} . Le bord d'une arête ($a \in \mathcal{T}^1$) est constitué de sommets ($S \in \mathcal{T}^0$) du maillage:

$$(2.1) \quad \partial a \subset \mathcal{T}^0, \quad a \in \mathcal{T}^1$$

et le bord d'un élément ($K \in \mathcal{T}^2$) est composé d'arêtes ($a \in \mathcal{T}^1$):

$$(2.2) \quad \partial K \subset \mathcal{T}^1, \quad K \in \mathcal{T}^2$$

- Le cobord d'une arête consiste à "retourner la flèche" $\mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}^1$ associée à la relation (2.2). Pour $a \in \mathcal{T}^1$, on définit le cobord $\partial^c a$ comme l'ensemble des éléments $K \in \mathcal{T}^2$

qui contiennent l'arête a dans leur bord :

$$(2.3) \quad \partial^c a = \{K \in \mathcal{T}^2, a \subset \partial K\}, \quad a \in \mathcal{T}^1.$$

- Si l'arête a est intérieure au maillage, un rapide regard sur la figure 1 montre que le cobord $\partial^c a$ est constitué de deux triangles. Il faut savoir que la propriété est générale. En dimension N , le cobord des éléments géométriques de dimension $N-1$ est toujours composé de deux éléments s'il ne se situe pas au bord.

Si on décide d'orienter la l'arête a (figure 3), la normale n^a pointe naturellement de l'un des éléments du cobord vers l'autre.

On décide de nommer K_g^a le premier (élément "à gauche" de l'arête a) et K_d^a le second (élément "à droite") :

$$(2.4) \quad \partial^c a = \{K_g^a, K_d^a\}, \quad a \text{ intérieure}, \quad a \in \mathcal{T}^1.$$

Nous avons aussi la propriété suivante

$$(2.5) \quad \text{la normale } n^a \text{ est extérieure à } K_g^a$$

$$(2.6) \quad \text{la normale } -n^a \text{ est extérieure au triangle } K_d^a,$$

la figure 3 permettant de visualiser ces propriétés topologiques élémentaires.

- Si l'arête a est sur le bord du domaine, la convention (1.7) impose à l'arête n^a de pointer vers l'extérieur du domaine Ω . Le cobord $\partial^c a$ n'est plus constitué que d'un seul élément, qui est donc par convention celui de gauche :

$$(2.7) \quad \partial^c a = \{K_g^a\}, \quad a \in \mathcal{T}^1, \quad a \subset \partial\Omega.$$

on renvoie à la figure 3. Si a est au bord, le point E "à l'est" n'existe plus et le triangle $[N, S, E]$ n'existe plus dans le maillage. Le cobord de l'arête $a =]S, N[$ se réduit à l'élément de gauche $K_g =]S, N, W[$.

- On peut composer les opérations de bord et de cobord, mais dans certains cas seulement car nous n'avons ici défini le cobord que pour une arête $a \in \mathcal{T}^1$ du maillage. Si $a \in \mathcal{T}^1$, $\mathcal{I}a$ est niché dans \mathcal{T}^2 , donc on peut considérer le bord $\partial K \subset \mathcal{T}^1$ de chacun des triangles K qui constituent le cobord de a . On obtient ainsi un ensemble de cinq arêtes décrit à la figure 4. Nous retenons

$$(2.8) \quad \partial(\partial^c a) \subset \mathcal{T}^1, \quad a \in \mathcal{T}^1.$$

De manière duale, si $K \in \mathcal{T}$ un élément du

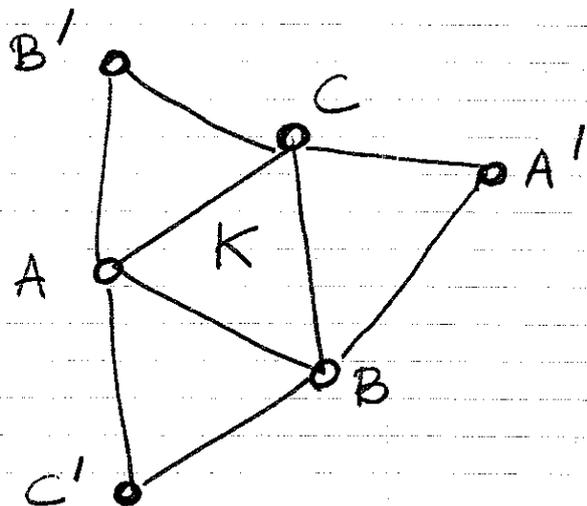
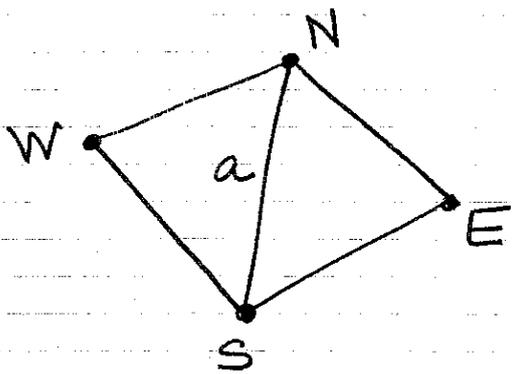


Figure 4 Le bord du cobord de l'arête $a =]S, N[$ est formé par les cinq arêtes $]N, W[$, $]N, S[$, $]S, E[$, $]E, N[$ et a elle-même [a gauche]. Le cobord du bord du triangle $K = (A, B, C)$ est constitué par les quatre triangles (A, C', B) , (C, B, A') , (A, C, B') et K lui-même [a droite].



maillage \mathcal{T} , son bord ∂K est inclus dans l'ensemble \mathcal{T}' des arêtes et on peut maintenant considérer le cobord $\partial^c a$ de chacune d'entre elles. Dans le cas de données à l'intérieur du maillage, on obtient ainsi un ensemble de quatre triangles formé de K lui-même et de ses trois voisins "via les arêtes de son bord":

$$(2.9) \quad \partial^c(\partial K) \subset \mathcal{T}^2, \quad K \in \mathcal{T}^2.$$

- 9
- Nous terminons ce paragraphe par la définition du nombre d'incidence ε_K^a entre une arête $a \in \mathcal{E}^1$ et un élément $K \in \mathcal{E}^2$. Si a n'est pas incluse dans le bord de K , on pose simplement $\varepsilon_K^a = 0$. Si a est incluse dans ∂K , on pose $\varepsilon_K^a = +1$ si la normale n^a est extérieure au triangle K et alors $K = K_g^a \in \partial^c a$. Lorsque $a \subset \partial K$ et $-n^a$ est extérieure à l'élément K , alors $K = K_d^a \in \partial^c a$ et on pose $\varepsilon_K^a = -1$.

$$(2.10) \quad \varepsilon_{K_g^a}^a = +1, \quad \varepsilon_{K_d^a}^a = -1, \quad \varepsilon_K^a = 0$$

si $K \notin \partial^c a$.

3) Evolution des valeurs moyennes

- On suppose maintenant qu'on dispose d'une solution (a priori régulière)

$$(3.1) \quad \mathbb{D}_x[0, T] \quad \exists (x, t) \mapsto w(x, t) \in \Omega$$

des équations de Saint-Venant

$$(3.2) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) + \frac{\partial}{\partial y} g(w) = 0.$$

- Pour $K \in \mathcal{E}^2$, on définit la valeur moyenne \bar{w}_K de la solution de (3.2) dans l'élément K par la relation naturelle

$$(3.3) \quad \overline{w}_K = \frac{1}{|K|} \int_K w(x, y, t) dx dy, \quad K \in \mathcal{T}^2$$

Pour $a \in \mathcal{T}^1$ arête du maillage, supposée orientée, on dispose de la normale n^a (de module unitaire par convention), donc du flux normal moyen $\overline{\Phi}(n^a, w)$ dans la direction n^a :

$$(3.4) \quad \overline{\Phi}(n^a, w) = \frac{1}{|a|} \int_a [n_x^a f(w) + n_y^a g(w)] d\gamma, \quad a \in \mathcal{T}^1.$$

Dans les relations (3.3) et (3.4), $|K|$ et $|a|$ désignent respectivement la surface du triangle K et la longueur de l'arête a , et $n^a \equiv (n_x^a, n_y^a) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition ① La dynamique s'écrit à l'aide d'un bilan de flux. Avec les notations introduites juste au dessus, on a:

$$(3.5) \quad \frac{d\overline{w}_K}{dt} + \sum_{a \in \mathcal{T}^1} \varepsilon_K^a \frac{|a|}{|K|} \overline{\Phi}(n^a, w)(t) = 0, \quad K \in \mathcal{T}^2.$$

- La somme \sum_a de la relation (3.5) est a priori étendue aux arêtes a du bord de K : $a \subset \partial K$. On peut éliminer cette écriture avec la convention faite en (2.10) : $\varepsilon_K^a = 0$ si K ne contient pas l'arête dans son bord.

Preuve de la proposition (1)

11

On dérive la relation (3.3) ou on intègre en espace dans le volume K la loi de conservation (3.2). Il vient :

$$|K| \frac{d\bar{w}_K}{dt} + \int_{\partial K} (f n_x + g n_y) d\gamma = 0$$

où $n = (n_x, n_y)$ désigne la normale extérieure au bord du triangle K . On décompose cette intégrale de bord comme une somme sur les trois arêtes qui constituent le bord ∂K :

$$(3.6) \quad \int_{\partial K} (f n_x + g n_y) d\gamma = \sum_{a \in \mathcal{G}^1, a \subset \partial K} \int_a (f n_x + g n_y) d\gamma$$

et chaque terme du membre de droite de (3.6) est à une constante près le flux normal $\bar{\phi}(n^a, w)$ défini à la relation (3.4). Il ne reste qu'à transformer la normale n . Si

$n^a = n$, alors $K = K_z^a$ et $\int_a (f n_x + g n_y) d\gamma = |a| \bar{\phi}(n^a, w)$,
alors que dans l'autre cas où $n^a + n = 0$, i.e.
 $K = K_d^a$, on a $\int_K (f n_x + g n_y) d\gamma = -|a| \bar{\phi}(n^a, w)$.

Dans tous les cas, on a

$$(3.7) \quad \int_a (f n_x + g n_y) d\gamma = \varepsilon_K^a |a| \bar{\phi}^a(n^a, w), \quad a \subset \partial K$$

en introduisant le nombre d'incidence ε_K^a décrit à la relation (2.10).

On regroupe les expressions (3.6) et (3.7) et il vient

$$(3.8) \quad |K| \frac{dw_K}{dt} + \sum_{a \in \mathcal{B}^1, a \subset \partial K} \varepsilon_K^a |a| \bar{\phi}(n^a, w) = 0, \quad K \in \mathcal{B}^2$$

ce qui établit la relation (3.5), compte tenu de la remarque préliminaire à cette démonstration.



- Si on dispose du flux normal moyen $\bar{\phi}(n^a, w)(t)$ à tout instant $t > 0$ et pour toutes les arêtes du maillage, on obtient les valeurs moyennes w_K de la solution w de (3.2) dans les éléments du maillage par une simple quadrature en temps. Ce flux normal moyen est la moyenne des flux normaux $\phi(n^a, w)$. Pour $n = (\cos \theta, \sin \theta)$ unitaire, on pose

$$(3.9) \quad \phi(n, w) \equiv \cos \theta f(w) + \sin \theta g(w), \quad n = (\cos \theta, \sin \theta)$$

et on a alors

$$(3.10) \quad \bar{\phi}(n^a, w)(t) = \frac{1}{|a|} \int_a \phi(n^a, w(x, y, t)) d\delta(x, y)$$

4) Méthode des lignes.

- Nous cherchons maintenant à définir une méthode numérique pour approcher la valeur

moyenne $\overline{w_K(t)}$ par une fonction $w_K(t)$ que nous allons pouvoir évaluer numériquement. Dans un premier temps, avec cette "méthode de des lignes", nous supposons que la résolution d'une équation différentielle n'est pas un problème et nous cherchons une "équation différentielle ordinaire", un système différentiel plus exactement, vérifié par l'ensemble des valeurs $w_K(t)$. Nous posons donc

$$(4.1) \quad W = \{w_K, K \in \mathcal{T}^2\} \subset \Omega^{\#\mathcal{T}^2}$$

et nous cherchons $\mathcal{F}: W \mapsto \mathcal{F}(W)$ de sorte que $w(t)$ (l'ensemble de toutes les valeurs moyennes) soit solution d'un système différentiel:

$$(4.2) \quad \frac{dw}{dt} = \mathcal{F}(w).$$

La fonction $\mathcal{F}(w)$ doit en être définie pour tout élément K du maillage:

$$(4.3) \quad \mathcal{F}(w) = \{F_K(w), K \in \mathcal{T}^2\}$$

et chacune des fonctions $F_K(w)$ définit un bilan de flux pour la maille K :

$$(4.4) \quad \frac{dw_K}{dt} = F_K(w), \quad K \in \mathcal{T}^2$$

$$(4.5) \quad F_K(w) \simeq - \sum_{a \in \mathcal{T}^1} \varepsilon_K^a \frac{|a|}{|K|} \phi(n^a, w).$$

- Il s'agit de construire au mieux cette fonction F_K , de modéliser au mieux la dynamique (3.5) au moyen des équations différentielles (4.4). La situation est la suivante: nous disposons des valeurs moyennes $w_K(t)$ à l'instant t , mais nous ne disposons pas du flux moyen $\bar{\phi}(n^a, w)$ qui permettrait de "fermer" le système (4.4) (4.5), c'est à dire de poser l'équation d'évolution (4.2).

numérique

- L'idée de la méthode des volumes fins est de construire, pour chaque arête $a \in \mathcal{B}^1$, un flux d'interface $f^a(w)$ qui ne soit fonction que des valeurs moyennes $w_L, L \in \mathcal{B}^2$, sans se limiter a priori sur les valeurs moyennes à considérer pour définir la fonction f^a . On demande simplement que le flux numérique d'interface soit une "bonne approximation" du flux normal moyen $\bar{\phi}(n^a, w)$:

$$(4.6) \quad f^a(w) \approx \bar{\phi}(n^a, w), \quad a \in \mathcal{B}^1.$$

Cette fonction étant explicite, on peut l'utiliser pour fabriquer le bilan de flux F_K , en prenant par exemple

$$(4.7) \quad F_K(w) = - \sum_{a \in \mathcal{B}^1} \varepsilon_K^a \frac{|a|}{|K|} f^a(w).$$

quand on injecte la représentation (4.7) au sein de (4.4), on obtient un système différentiel (de dimension $3 \times \# \mathbb{C}^2$ pour les équations de Saint Venant à deux dimensions d'espace) qui s'écrit alors effectivement sous la forme (4.2).

- La discrétisation en temps de (4.2) est alors classique. Nous introduisons un pas de temps $\Delta t > 0$ (choisi dans les chapitres suivants; il y a une condition de stabilité à respecter), une valeur approchée

$$(4.8) \quad w^n \approx w(n\Delta t), \quad n \in \mathbb{N}$$

et le schéma d'Euler explicite s'écrit simplement

$$(4.9) \quad \tilde{w}^{n+1} = w^n + \Delta t \mathcal{F}(w^n).$$

Son extension à l'ordre deux via un schéma de Heun est également classique. On part du schéma d'Euler (4.9) et on pose

$$(4.10) \quad w^{n+1} = w^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathcal{F}(w^n) + \mathcal{F}(\tilde{w}^{n+1})), \quad n \in \mathbb{N}$$

soit sur une seule ligne

$$(4.11) \quad w^{n+1} = w^n + \frac{\Delta t}{2} [\mathcal{F}(w^n) + \mathcal{F}(w^n + \Delta t \mathcal{F}(w^n))], \quad n \in \mathbb{N}.$$

5) Flux numérique

- Nous avons résolu au paragraphe précédent la construction d'une méthode de volumes finis au problème suivant : étant donné un ensemble \mathcal{W} de valeurs (moyennes) $w_K \in \Omega$ définies pour tous les éléments $K \in \mathcal{T}$ du maillage \mathcal{T} , comment approcher le flux normal d'interface $\bar{\Phi}(n^a, w)$, i.e. comment définir une fonction

$$(5.1) \quad w \mapsto f^a(w) \in \mathbb{R}^3, \quad a \in \mathcal{G}^1$$

qui approche $\bar{\Phi}$ (relation (4.6)) ? Nous ne répondons pas à cette question dans ce paragraphe. Nous nous contentons ici de proposer quelques principes généraux pour la construction d'un flux numérique.

- La première chose en que nous éliminons pratiquement le cas des arêtes au bord du domaine D . de calcul de "flux frontière" est une adaptation (parfois fort complexe !) des principes proposés dans la suite. Nous ne traitons donc pas de cette question ici.

- Nous disposons donc d'une arête $a \in \mathcal{C}^1$ intérieure au domaine D , de valeurs W_L pour tous les éléments $L \in \mathcal{C}^2$. Nous cherchons un flux normal le long de l'arête a qui approche le flux dans la direction normale à l'arête, i.e.

$$(5.2) \quad f^a(w) \approx n_x^a f + n_y^a g, \quad a \in \mathcal{C}^1.$$

La difficulté est que si nous connaissons les fonctions $\Omega \ni w \mapsto f(w) \in \mathbb{R}^3$ et $\Omega \ni w \mapsto g(w) \in \mathbb{R}^3$ (voir le chapitre précédent), nous ne savons pas pour quel état $w \in \Omega$ évaluer le membre de droite de la relation (5.2).

- d'approche la plus simple algébriquement consiste à introduire les deux éléments K_g^a et K_d^a du cobord de a (cf figure 3), constater qu'on dispose d'une valeur W_g^a du champ W_L dans l'élément de gauche K_g^a et d'une valeur W_d^a de ce même champ dans l'élément de droite K_d^a . On pose donc les notations simplifiées suivantes

$$(5.3) \quad W_g^a = W_{K_g^a}, \quad a \in \mathcal{C}^1$$

$$(5.4) \quad W_d^a = W_{K_d^a}, \quad a \in \mathcal{C}^1.$$

Nous nous contentons dans cette première approche de définir le flux numérique d'interface $f^a(w)$ comme une fonction Ψ qui ne dépend que des deux champs w_g^a, w_d^a et bien entendu de la normale n^a à l'arête a :

$$(5.5) \quad f^a(w) = \Psi(w_g^a, n^a, w_d^a), \quad a \in \mathcal{B}^1,$$

ce qui réduit le problème à la détermination d'une fonction Ψ de trois arguments: $w_g^a \in \Omega$, $n^a \in S^1$ (sphère unité du plan \mathbb{R}^2), $w_d^a \in \Omega$ et à valeurs dans \mathbb{R}^3 (car $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ pour les équations de Saint Venant posées dans \mathbb{R}^2):

$$(5.6) \quad \Omega \times S^1 \times \Omega \ni (w_g, n, w_d) \mapsto \Psi(w_g, n, w_d) \in \mathbb{R}^3.$$

- La première contrainte à imposer à $\Psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ est d'avoir une relation avec les équations de Saint Venant! Si le champ $w(\cdot)$ est constant, le flux normal $\phi(n^a, w)$ (défini en (3.9)) est connu sans ambiguïté. On décide qu'il en sera de même si les deux arguments w_g et w_d de Ψ sont égaux et que $\Psi(w, n, w)$ est égal au flux normal $\phi(n, w)$; c'est la propriété de consistance du flux numérique:

$$(5.7) \quad \Psi(w, n, w) = \phi(n, w) \equiv n_x f(w) + n_y g(w), \quad w \in \Omega.$$

• Une seconde condition est liée à l'ambiguïté liée à l'orientation de l'arête a . Si on change l'orientation de l'arête, on ne doit pas changer le bilan de flux F_K dans les éléments $K \in \mathcal{T}$, mais l'expression (4.7) de $F_K(\cdot)$ contient à la fois le nombre d'incidence ε_K^a et le flux normal $f^a(w)$. Que se passe-t-il donc si on change l'orientation de la normale n^a (c'est l'orientation de l'arête a)? on change n^a en $-n^a$, mais en même temps la "gauche" de l'arête a devient la "droite" et réciproquement (reprenez la figure 3 en regardant la page du haut vers le bas). Le nouveau flux f^a s'écrit donc $\psi(w_d^a, -n^a, w_g^a)$ et doit être opposé à celui introduit à la relation (5.5) de manière à ce que l'expression $\varepsilon_K^a f^a(w)$ ne soit pas modifiée. Nous appelons cette condition la "compatibilité topologique":

$$(5.8) \quad \psi(w_g, n, w_d) + \psi(w_d, -n, w_g) = 0.$$

• Nous pouvons enfin transcrire pour le flux numérique l'invariance par rotation des équations de Saint-Venant introduites au chapitre précédent. Si on tourne le vecteur n d'un angle θ et qu'on tourne le champ $w \in \Sigma$ du même angle θ (relation (4.4) du chapitre précédent),

alors le flux normal $\phi(n, w)$ est tourné du même angle θ :

$$(5.9) \quad \phi(R_\theta n, \tilde{R}_\theta w) = \tilde{R}_\theta \phi(n, w), \quad n \in S^1, w \in \Omega, \theta \in \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $n = (1, 0)$, on a:

$$(5.10) \quad \cos \theta f(w) + \sin \theta g(w) = \tilde{R}_\theta f(\tilde{R}_\theta w), \quad w \in \Omega, \theta \in \mathbb{R}.$$

- Nous proposons d'étendre cette invariance par rotation au flux numérique Ψ : quand on tourne tous les arguments du flux Ψ d'un même angle $\theta \in \mathbb{R}$, on "tourne" le flux Ψ de cet angle θ . On a donc

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(\tilde{R}_\theta w_g, R_\theta n, \tilde{R}_\theta w_d) = \tilde{R}_\theta \Psi(w_g, n, w_d), \\ w_g \in \Omega, n \in S^1, w_d \in \Omega, \theta \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

- Cette propriété a une conséquence intéressante. Pour calculer Ψ dans la direction $\tilde{n} = R_\theta n$ arbitraire, on peut toujours utiliser la relation (5.11) et il suffit d'avoir calculé $\Psi(w_g, (1, 0), w_d)$ dans une direction parallèle à Ox avant de le transporter par rotation. Cette remarque indique pourquoi une étude approfondie du cas monodimensionnel suffit pour construire l'essentiel d'une méthode de volumes finis.