



# Introduction aux systèmes hyperboliques non linéaires

Villetaneuse, 2005

## Cours 03

### Ondes de détente

- Solution autosemblable
- Invariants de Riemann
- Ondes de détente
- Représentation dans le plan vitesse - pression

François Dubois  
avril 2005, 19 pages

# Ondes de détente

## 1) Solution autosemblable

- On étudie les équations de Saint-Venant à une dimension d'espace, écrites dans un premier temps sous forme conservative

$$(1.1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0$$

avec

$$(1.2) \quad w = (\rho, \rho u, \rho v)^t, \quad f(w) = (\rho u, \rho u^2 + K \rho^\gamma, \rho u v)^t.$$

On cherche une solution régulière  $(x,t) \mapsto w(x,t) \in \Omega$  du système (1.1) qui soit autosemblable, c'est à dire invariante dans le changement  $(x,t) \mapsto (\lambda x, dt)$  ce pour tout  $\lambda > 0$ . On cherche donc  $W$  fonction de la variable  $\frac{x}{t}$  seulement :

$$(1.3) \quad w(x,t) = V\left(\frac{x}{t}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Cette hypothèse posée, on injecte la représentation (1.3) au sein de l'équation (1.1), après avoir posé

$$(1.4) \quad A(w) = df(w), \quad w \in \Omega.$$

On a facilement, avec  $\xi \equiv \frac{x}{t}$  :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} \frac{dw}{d\xi} = -\frac{1}{t} \xi \frac{dw}{d\xi}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{dw}{d\xi}. \quad \text{Donc puisque } t > 0,$$

$$(1.5) \quad A(V(\xi)) \cdot \frac{dV}{d\xi} = \xi \frac{dV}{d\xi}, \quad \xi = \frac{x}{t}.$$

- On tire maintenant les conséquences de la relation (1.5). ou bien le vecteur  $\frac{dV}{d\xi}$  est nul, et alors  $V(\xi)$  est une constante  $V_0$ , ce qui est effectivement une solution (autosemblable !) de (1.1).  
ou bien  $\frac{dV}{d\xi}$  est non nul, et il est alors nécessairement vecteur propre de la matrice  $A(V(\xi))$  pour une certaine valeur propre  $\lambda_j(V(\xi))$ . De plus, la relation (1.5) entraîne que  $\xi$  est égal à la valeur propre :

$$(1.6) \quad \exists j, \quad \lambda_j(V(\xi)) = \xi$$

$$(1.7) \quad \frac{dV}{d\xi} \text{ colinéaire au vecteur propre } v_j(V(\xi)).$$

- En fait, la conclusion (1.6)(1.7) est générale et est encore correcte si on part d'une forme non conservative des équations de Saint-Venant.

Proposition ① Solution autosemblable non conservative.  
Soit  $\Omega \ni W \mapsto Z = \mathcal{Z}(W) \in \Gamma$  un changement de champ inconnu bijectif et régulier ainsi que son inverse. On suppose que le système (1.1) prend pour cet ensemble d'inconnues la forme

$$(1.8) \quad \frac{\partial Z}{\partial t} + B(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

et on sait que les matrices  $B(Z)$  et  $A(W)$  sont semblables si  $Z = \mathcal{Z}(W)$ . En particulier, elles ont

mêmes valeurs propres  $\lambda_1 \equiv u - c < \lambda_2 \equiv u < \lambda_3 \equiv u + c$ .  
 On note  $\tilde{r}_j(z)$  les vecteurs propres correspondants.  
 Une solution auto-similaire

$$(1.9) \quad (x, t) \mapsto Z(x, t) = Y\left(\frac{x}{t}\right) \in \Gamma$$

de l'équation (1.8) satisfait à l'alternative suivante :

- ou bien  $Y(\xi)$  est constante, pour  $\xi$  décrivant un certain intervalle de  $\mathbb{R}$ ,
- ou bien  $\frac{dY}{d\xi}$  est vecteur propre de la matrice  $B(Y)$ ,

$$(1.10) \quad \exists j \in \{1, 2, 3\}, \exists \alpha(\xi) \neq 0, \frac{dY}{d\xi} = \alpha(\xi) \tilde{r}_j(Y)$$

et de plus, la valeur propre  $\lambda_j(Y)$  est égale au paramètre de similitude  $\xi = x/t$  :

$$(1.11) \quad \lambda_j(Y(\xi)) = \xi, \quad j \text{ chois en (1.10)}.$$

### Preuve de la proposition ①

- Elle est analogue au cas vu plus haut avec les variables conservatives. On a facilement

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \frac{dY}{d\xi}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{dY}{d\xi}, \quad \text{donc}$$

$$(1.12) \quad B(Y(\xi)) \cdot \frac{dY}{d\xi} = \xi \frac{dY}{d\xi}$$

d'interprétation de (1.12) est claire : ou bien  $\frac{dY}{d\xi} = 0$  et  $Y(\xi)$  est constante dans un intervalle (non précisé ici !) où varie  $\xi$  ; ou bien  $\frac{dY}{d\xi} \neq 0$  et il est nécessairement vecteur propre

de la matrice  $B(Y)$ , c'est à dire proportionnel au vecteur propre  $\tilde{r}_j(Y)$  donné a priori. C'est exactement ce qu'exprime la relation (1.10). La relation (1.11) est une conséquence de (1.12) et de la définition

$$(1.13) \quad B(Y) \tilde{r}_j(Y) = \lambda_j(Y) \tilde{r}_j(Y)$$

de la  $j^{\text{o}}$  valeur propre associé au  $j^{\text{o}}$  vecteur propre.  $\square$

## 2) Invariants de Riemann

- La résolution de l'équation (1.10) demande d'identifier le champ de vecteurs  $\tilde{r}_j$ , avec la difficulté supplémentaire que  $\frac{dY}{dS}$  est simplement colinéaire à ce vecteur propre. Nous allons contourner la difficulté en introduisant, pour tout champ propre de la matrice  $B(Z)$ , la notion d'invariant de Riemann.
- Par définition, un  $j$ -invariant de Riemann, ou un invariant de Riemann pour le  $j^{\text{o}}$  champ est une fonction  $\beta^j: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , transversale au champ de vecteurs propres  $\tilde{r}_j$ :

$$(2.1) \quad \Gamma \ni Z \mapsto \beta^j(Z) \in \mathbb{R}$$

$$(2.2) \quad d\beta^j(Z) \cdot \tilde{r}_j(Z) = 0, \quad \forall Z \in \Gamma.$$

Cette définition appelle un commentaire. Rappelons que l'ensemble  $\Gamma$  est une partie de  $\mathbb{R}^3$  en la variable non conservative  $Z$  prend ses valeurs. La matrice  $B(Z)$  est une matrice  $3 \times 3$  qui dépend de l'état  $Z \in \Gamma$ . Il en est de même du  $j^{\text{e}}$  vecteur propre  $\tilde{r}_j(Z)$  qui est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  fonction de  $Z$ . Un invariant de Riemann pour cette valeur propre  $\lambda_j$  particulière est une fonction scalaire  $\beta^j$  qui dépend de  $Z \in \Gamma$ , dérivable, de sorte que sa dérivée dans la direction  $\tilde{r}_j(Z)$  est nulle (c'est exactement ce qu'exprime la relation (2.2) !).

- on peut particulariser les variables  $Z$  et choisir le triplet

$$(2.3) \quad Z = (\rho, u, v)^t.$$

Alors  $\Gamma = \{(\rho, u, v) \in \mathbb{R}^3, \rho > 0\}$  et l'espace  $\mathbb{R}^3$  a trois composantes de "densité", "vitesse en  $x$ " et "vitesse en  $y$ ". On a aussi

$$(2.4) \quad d\beta^j(Z) = \frac{\partial \beta^j}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \beta^j}{\partial u} du + \frac{\partial \beta^j}{\partial v} dv$$

ce qui permet d'introduire le gradient

$$(2.5) \quad \nabla \beta^j = \left( \frac{\partial \beta^j}{\partial \rho}, \frac{\partial \beta^j}{\partial u}, \frac{\partial \beta^j}{\partial v} \right),$$

et réécrit la relation (2.2) sous la forme

$$(2.6) \quad \nabla \beta^j(Z) \cdot \tilde{r}_j(Z) = 0.$$

- Avant de poursuivre la recherche des invariants de Riemann, nous devons préciser les vecteurs propres de la matrice  $B(Z)$  qui, pour le choix (2.3), s'exprime selon

$$(2.7) \quad B(Z) = \begin{pmatrix} u & p & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & 0 \\ p_0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

avec

$$(2.8) \quad c = \sqrt{\frac{\rho r}{\rho}}, \quad \mu = k \rho^\gamma, \quad k > 0, \gamma > 1.$$

on vérifie sans difficulté que

$$(2.9) \quad \tilde{r}_1 = (p, -c, 0)^t, \quad \lambda_1 = u - c$$

$$(2.10) \quad \tilde{r}_2 = (0, 0, 1)^t, \quad \lambda_2 = u$$

$$(2.11) \quad \tilde{r}_3 = (p, c, 0)^t, \quad \lambda_3 = u + c.$$

### Proposition (2) Expression des invariants de Riemann

Pour les équations de Saint-Venant on dispose, pour tout champ  $j \in \{1, 2, 3\}$ , de deux  $j$ -invariants de Riemann, notés  $\beta_1^j$  et  $\beta_2^j$ . On peut choisir par exemple

$$(2.12) \quad \beta_1^1 = v, \quad \beta_2^1 = u + \frac{2c}{\gamma-1}$$

$$(2.13) \quad \beta_1^2 = u, \quad \beta_2^2 = \mu$$

$$(2.14) \quad \beta_1^3 = v, \quad \beta_2^3 = u - \frac{2c}{\gamma-1}.$$

## Preuve de la proposition (2)

- Pour  $\beta_1^1 \equiv v$ , on a  $\nabla \beta_1^1 = (0, 0, 1)$ , donc, compte tenu de la relation (2.9),  $\nabla \beta_1^1 \cdot \tilde{r}_1 \equiv 0$  et la relation (2.6) est établie dans ce cas. Pour l'invariant  $\beta_2^2$ , il faut d'abord dériver la célérité des ondes sonores. On a :

$$c^2 = \gamma K \rho^{\gamma-1}, \text{ donc } 2c \frac{dc}{d\rho} = \gamma K (\gamma-1) \rho^{\gamma-2}, \text{ soit}$$

$$(2.15) \quad \frac{dc}{d\rho} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{c}{\rho}$$

On en déduit  $\nabla \beta_2^1 = \left( \frac{c}{\rho}, 1, 0 \right)$  et on a  $\nabla \beta_2^1 \cdot \tilde{r}_1 = \frac{c}{\rho} \cdot \rho + 1 \cdot (-c) = 0$ , ce qui établit a nouveau la relation (2.6). Le calcul est tout à fait analogue pour les invariants de Riemann  $\beta_1^3$  et  $\beta_2^3$ . Nous le laissons au lecteur.

- Pour le second champ, avec les relations proposées en (2.13), on a  $\nabla \beta_1^2 = (0, 1, 0)$ , donc la conclusion (2.6) est alors conséquence immédiate de l'expression (2.10) du vecteur propre. Bien entendu,  $\beta_*^2 \equiv p$  est invariant de Riemann pour le second champ, puisque  $\nabla \beta_*^2 = (1, 0, 0)$  et  $\nabla \beta_*^2 \cdot \tilde{r}_2 = 0$ . On lui préfère la pression  $p = K \rho^\gamma$ ;  $\nabla \beta_2^2 = c^2 \nabla \beta_*^2$  [donc (2.6) a encore lieu] pour des raisons qui dépassent le cadre de ce travail fondamental sur les équations de Saint Venant.



Proposition ③ Les invariants de Riemann sont indépendants de la représentation choisie.

Soit  $\Omega \ni w \mapsto Z = Z(w) \in \Gamma$  un changement régulier de fonction inconnue régulier lié-voque et  $\beta^j: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  un  $j$ -invariant de Riemann. Alors  $\gamma^j$  défini sur  $\Omega$  par

$$(2.16) \quad \gamma^j(w) = \beta^j(Z(w)), \quad w \in \Omega$$

est un invariant de Riemann relativement à la représentation en variables conservatives.

Si  $r_j(w)$  est un vecteur propre pour la  $j^{\text{e}}$  valeur propre de  $A(w) = df(w)$ , i.e.

$$(2.17) \quad A(w) \cdot r_j(w) = \lambda_j(w) r_j(w)$$

alors on a

$$(2.18) \quad d\gamma^j(w) \cdot r_j(w) = 0, \quad \forall w \in \Omega.$$

et  $\gamma^j(\cdot)$  est

### Preuve de la proposition ③

- C'est une conséquence facile du lien (établi au premier chapitre) entre les matrices  $B(Z)$  et  $A(w)$ , c'est à dire du lien entre  $\tilde{r}_j(Z)$  et  $r_j(w)$ . Si  $w(\cdot)$  est solution de (1.1), on a aussi

$$(2.19) \quad \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial t} + df(w) \cdot \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$

ce qui montre, compte tenu de (1.8), que

$$(2.20) \quad B(Z) = \left( \frac{\partial w}{\partial Z} \right)^{-1} A(w) \frac{\partial w}{\partial Z}$$

et en conséquence,

$$(2.21) \quad \tilde{r}_j^i(z) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} r_j^i(w).$$

- Évaluons le membre de gauche de (2.18). On a  $d\alpha^j(w) \cdot r_j^i(w) = d\beta^j(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \tilde{r}_j^i(z) = d\beta^j(z) \cdot \tilde{r}_j^i(z)$  qui est nul compte tenu de (2.2).  $\square$

- Nous pourrions maintenant faire le lien entre les invariants de Riemann et les solutions auto-similaires régulières solution de (1.10)(1.11). On a d'abord

Proposition (4) Les invariants de Riemann sont nuls

pour une solution auto-similaire

soit  $\xi \mapsto Y(\xi) \in \Gamma$  une solution régulière de (1.10) (1.11), qui permet de construire une solution auto-similaire  $z(x,t)$  via (1.9). Alors pour tout  $j$ -invariant de Riemann  $\beta^j$ , on a

$$(2.22) \quad \frac{d}{d\xi} \beta^j(Y(\xi)) = 0.$$

L'invariant de Riemann est constant sur l'onde de détente pour le  $j^o$ -champ.

Preuve de la proposition (4)

- on a très simplement

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \beta^j(Y(\xi)) &= d\beta^j(Y) \cdot \frac{dY}{d\xi} = d\beta^j(Y) \cdot \alpha(\xi) \tilde{r}_j^i(Y(\xi)) \\ &= \alpha(\xi) d\beta^j(Y) \cdot \tilde{r}_j^i(Y) = 0 \quad \text{vu (2.2)}. \end{aligned}$$



### 3) ondes de détente

10

- en cherchant dans ce paragraphe à construire une  $j$ -onde de détente issue d'un état  $Z_0 \in \Gamma$  et aboutissant à  $Z_1 \in \Gamma$ . Plus précisément, on cherche une fonction continue  $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto Y(\xi) \in \Gamma$  de sorte que

$$(3.1) \quad Y(\xi) = Z_0, \quad \xi \leq \xi_0$$

$$(3.2) \quad Y(\xi) \text{ solution de (1.10)/(1.11)}, \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$$

$$(3.3) \quad Y(\xi) = Z_1, \quad \xi \geq \xi_1$$

et on particularise la valeur de  $j$  à  $j=1$  pour fixer les idées dans une première approche.

- Compte tenu de (1.9), les relations (3.1) à (3.3) permettent de construire une solution (faible) de la loi de conservation (1.1), continuellement dérivable pour  $\frac{x}{t} \neq \xi_0, \xi_1$ , continue en  $\xi = \xi_0$  et  $\xi_1$  de sorte que  $Z(x,t) = Z_0$  pour  $\frac{x}{t} \leq \xi_0$ ,  $Z(x,t) = Z_1$  pour  $\frac{x}{t} \geq \xi_1$  et  $Z(x,t)$  solution autosemblable de (1.8) pour  $\xi_0 < \xi < \xi_1$ . Une telle onde est représentée à la figure 1: c'est une 1- onde de détente issue de  $W_0 = W(Z_0) \in \Omega$  et aboutissant à  $W_1 = W(Z_1) \in \Omega$ .

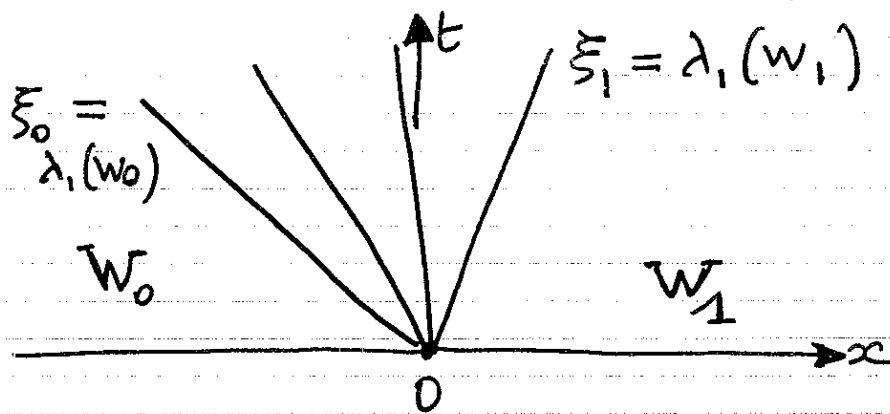


Figure 1 1 onde de détente issue de  $W_0$  et aboutissant à l'état  $W_1$ .

\* ————— \*

- Au lieu de chercher  $Y(\xi)$  solution de (1.10), on utilise les conditions nécessaires

$$(3.4) \quad \beta_1^1(Y(\xi)) = \beta_1^1(Z_0), \quad \beta_2^1(Y(\xi)) = \beta_2^1(Z_0) \quad \xi_0 < \xi < \xi_1$$

avec les invariants  $\beta_1^1$  et  $\beta_2^1$  (on s'intéresse aux 1. invariants de Riemann!) donnés aux relations (2.12). On utilise aussi la condition nécessaire (1.11) qui prend dans ce cas la forme

$$(3.5) \quad u(\xi) - c(\xi) = \xi, \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$$

ce qui implique, en particulier, compte tenu de la relation (3.1), qu'on a nécessairement

$$(3.6) \quad u_0 - c_0 = \xi_0,$$

ainsi qu'illustre à la figure 1.

- La constance de  $\beta_1^1$  et  $\beta_2^1$  dans l'onde de détente prend la forme algébrique

$$(3.7) \quad u(\xi) + \frac{2}{\gamma-1} c(\xi) = u_0 + \frac{2}{\gamma-1} c_0, \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$$

$$(3.8) \quad v(\xi) = v_0, \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1.$$

on déduit alors sans difficulté de (3.6)-(3.7) :

$$(3.9) \quad c(\xi) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (u_0 - \xi) + \frac{2}{\gamma+1} c_0, \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1,$$

$$(3.10) \quad u(\xi) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_0 + \frac{2}{\gamma+1} (c_0 + \xi), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$$

ce qui montre que la densité décroit dans la 1. détente issue de  $V_0$  et que la vitesse croît dans cette même onde. On a donc

$$(3.11) \quad c(\xi) \leq c_0, \quad u(\xi) \geq u_0, \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1.$$

- on vérifie sans difficulté que l'état  $\gamma(\xi) = (p(\xi), u(\xi), v(\xi))^t \in \Gamma$ , avec

$$(3.12) \quad c = c_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

en vraie solution de (2.10). On a en effet

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{dp}{dc} \frac{dc}{d\xi} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{p}{c} \frac{dc}{d\xi} \quad \text{compte tenu de (2.15)}$$

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{p}{c} \left( -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) = -\frac{2}{\gamma+1} \frac{p}{c} \quad \text{et}$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \frac{dv}{d\xi} = 0 \quad \text{compte tenu de (3.10) et (3.8)}$$

on en déduit

$$(3.13) \quad \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{2}{(\gamma+1)c} \tilde{r}_1(\gamma(\xi))$$

avec  $\tilde{r}_1$  donné à la relation (2.9), ce qui établit la relation (1.10) pour le champ  $\lambda_1 = u - c$ .  
On a établi la

Proposition (5) 1 onde de détente issue de  $W_0$ .

Soit  $W_0 \in \Omega$  un état fixe tel que  $Z_0 = (\rho_0, u_0, v_0)^t$ ,  $\xi_0$  donné par la relation (3.6) et  $\xi_1 > \xi_0$  arbitraire. Pour  $\xi \geq \xi_0$ , on définit l'état  $\gamma(\xi) = (\rho(\xi), u(\xi), v(\xi))$  via la vitesse du son  $c(\xi)$  (relation (3.12)), calculée en (3.9), la vitesse  $u(\xi)$  évaluée grâce à (3.10) et  $v(\xi)$  donné en (3.8). Pour  $\xi_1$  tel que

$$(3.14) \quad \xi_1 \leq u_0 + \frac{2}{\gamma-1} c_0,$$

on pose  $Z_1 = \gamma(\xi_1)$  et on définit l'état  $W(x, t)$  par les variables non conservatives  $Z(x, t)$  de sorte que

$$(3.15) \quad Z(x, t) = Z_0, \quad \frac{x}{t} \leq \xi_0 = u_0 - c_0$$

$$(3.16) \quad Z(x, t) = \gamma\left(\frac{x}{t}\right), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$$

$$(3.17) \quad Z(x, t) = Z_1, \quad \frac{x}{t} \geq \xi_1 = u_1 - c_1.$$

Alors  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[ \ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \Omega$  est une solution continue autosemblable de la loi de conservation (1.1) avec les données initiales

$$(3.18) \quad W(x, 0) = \begin{cases} W_0 & , x < 0 \\ W_1 & , x > 0 \end{cases}$$

où  $W_1 = W(Z_1)$ . C'est la 1. onde de détente



- Les calculs algébriques sont du même type que ceux vus plus haut. Compte tenu de (1.11), on a maintenant

$$(3.22) \quad u(\xi) + c(\xi) = \xi, \quad \xi_3 \leq \xi \leq \xi_0$$

et en particulier

$$(3.23) \quad u_0 + c_0 = \xi_0$$

comme illustré figure 2. Par ailleurs les invariants de Riemann  $\beta_1^3$  et  $\beta_2^3$  sont constants le long d'une telle onde. On en tire immédiatement, compte tenu de (2.14):

$$(3.24) \quad u(\xi) - \frac{2}{\gamma-1} c(\xi) = u_0 - \frac{2}{\gamma-1} c_0, \quad \xi_3 \leq \xi \leq \xi_0$$

$$(3.25) \quad v(\xi) = v_0, \quad \xi_3 \leq \xi \leq \xi_0$$

- La combinaison de (3.22) et (3.24) fournit immédiatement

$$(3.26) \quad c(\xi) = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (u_0 - \xi) + \frac{2c_0}{\gamma+1}, \quad \xi_3 \leq \xi \leq \xi_0$$

$$(3.27) \quad u(\xi) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_0 + \frac{2}{\gamma+1} (\xi - c_0), \quad \xi_3 \leq \xi \leq \xi_0$$

La densité est le long de la 3. détente et la vitesse est également. Comme  $\xi \leq \xi_0$ , on en déduit

$$(3.28) \quad c(\xi) \leq c_0, \quad u(\xi) \leq u_0, \quad \xi_3 \leq \xi \leq \xi_0$$

- L'état  $\gamma(\xi)$  ainsi obtenu est leur solution de (1.10). On a en effet



$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho}{c} \frac{dc}{d\xi} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho}{c} \frac{\gamma-1}{\gamma H} = \frac{2}{\gamma H} \frac{1}{c} \rho$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{2}{\gamma H} \quad , \quad \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad \text{donc}$$

$$(3.29) \quad \frac{dY}{d\xi} = \frac{2}{(\gamma H)c} \tilde{r}_3^v(Y) \quad , \quad \xi_3 \leq \xi \leq \xi_0.$$

avec  $\tilde{r}_3$  donné à la relation (2.11), ce qui montre (1.10)

Proposition (6) 3. onde de détente aboutissant à  $W_0$ .

Soit  $w_0 \in \mathcal{Q}$  fixé, avec  $Z_0 = (p_0, u_0, w_0)^t \in \Gamma$ ,  $\xi_0$  donné par la relation (3.23), et  $\xi_3 < \xi_0$  choisi de sorte que

$$(3.30) \quad \xi_3 \gg u_0 = \frac{2c_0}{\gamma-1}.$$

Pour  $\xi \in [\xi_3, \xi_0]$ , on définit l'état  $Y(\xi) = (p(\xi), u(\xi), v(\xi))$  via la vitesse du son  $c(\xi)$  (relation (3.26)), la vitesse selon  $x$   $u(\xi)$  (cf (3.24)) et l'autre composante  $v(\xi)$  de la vitesse (cf (3.25)). On pose  $Z_3 = Y(\xi_3)$  et on note  $W_3$  l'état conservatif correspondant. Pour  $(x,t) \in \mathbb{R} \times ]0, \infty[$ , on note  $W(x,t)$  l'état conservatif dont les variables non conservatives  $Z(x,t)$  vérifient

$$(3.31) \quad Z(x,t) = Z_3, \quad \frac{x}{t} \leq \xi_3 = u_3 + c_3$$

$$(3.32) \quad Z(x,t) = Y\left(\frac{x}{t}\right), \quad \xi_3 \leq \xi \leq \xi_0$$

$$(3.33) \quad Z(x,t) = Z_0, \quad \frac{x}{t} \gg \xi_0.$$

alors  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[ \ni (x, t) \mapsto w(x, t) \in \Omega$  est une solution faible, continue, autosemblable de la loi de conservation (1.1) avec la donnée initiale

$$(3.34) \quad w(x, 0) = \begin{cases} w_3, & x < 0 \\ w_0, & x > 0. \end{cases}$$

C'est la 3. détente aboutissant à l'état  $w_0$ .

#### 4) Représentation dans le plan vitesse pression.

- Il est commode pour la suite d'introduire le plan vitesse-pression des variables de Riemann pour le champ numérisé 2 (voir les relations (2.13)). Nous allons exprimer la vitesse  $u_1$  de l'état aval  $w_1$  en fonction de la pression  $p_1$  de cet état, le tout étant paramétré par l'état avant  $w_0$  par la 1. détente. On part des relations (3.7) et (3.12), compte tenu de la loi de pression

$$(4.1) \quad p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma.$$

On a d'une part

$$(4.2) \quad c = c_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

et d'autre part

$$(4.3) \quad u_1 = u_0 + \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right], \quad p_1 \leq p_0.$$

- on pose donc

$$(4.4) \quad \varphi_1(p) = u_0 + \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right], \quad p \leq p_0$$

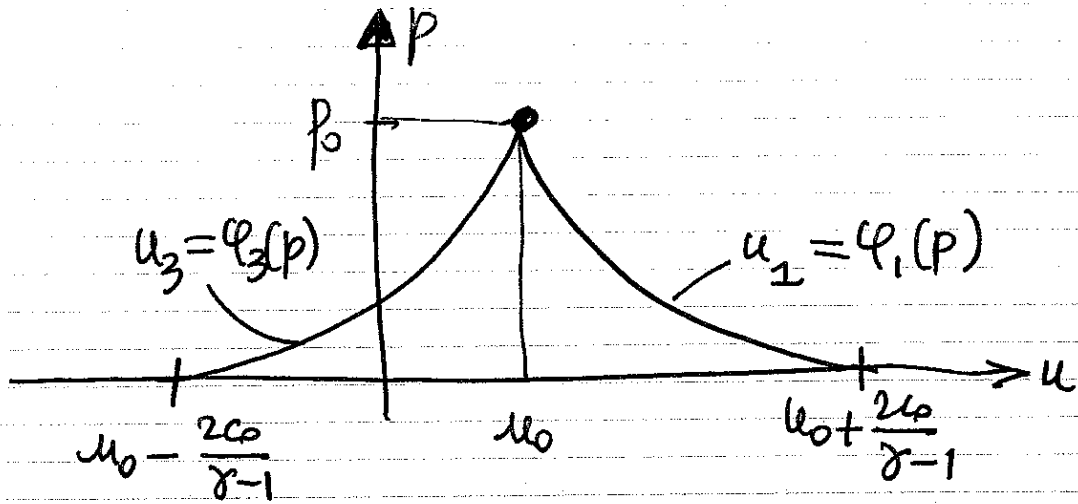


Figure 3 Représentation dans le plan vitesse-pression des états  $w_1$  en aval d'une 1. détente issue de  $w_0$  (ils vérifient  $u = \varphi_1(p)$ ) et des états  $w_3$  en amont d'une 3. détente qui aboutit à  $w_0$  (ils vérifient  $u = \varphi_3(p)$ ).

\* ————— \*

et l'état aval  $(u_1, p_1)$  vérifie  $u_1 = \varphi_1(p_1)$  (voir la figure 3).

- Pour l'ensemble des états  $w_3$  situés en amont d'une 3. détente qui aboutit à  $w_0$ , on fait de l'invariant de Riemann  $\beta_2^3$  (relation (3.24)) et la relation correspondante s'écrit

$$(4.5) \quad u_3 = u_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_3}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right], \quad p_3 \leq p_0.$$

on pose donc

$$(4.6) \quad \varphi_3(p) = u_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right], \quad p \leq p_0$$

et l'état amont vérifie cette fois  $u_3 = \varphi_3(p_3)$ . On renvoie encore à la figure 3.

D, 5/4/05.