



Introduction aux systèmes hyperboliques non linéaires

Villetaneuse, 2005

Cours 05

Problème de Riemann

- Schéma de Godunov
- Ondes de choc-détente
- Discontinuité de contact
- Construction d'une solution du problème

de Riemann

François Dubois
avril 2005, 29 pages

Problème de Riemann

1) Schéma de Godunov

- Nous avons vu que la méthode des volumes fins demande de savoir calculer (modéliser numériquement, pour être plus exact) le flux à l'interface entre deux volumes de contrôle. Dans le cas d'une seule dimension d'espace (et nous avons vu que modulo l'invariance par rotation, ce cas particulier est en fait générique), on suppose donnée une grille régulière $(x_j^*)_{j \in \mathbb{Z}}$ de pas Δx

$$(1.1) \quad x_j = j \Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}, \Delta x > 0$$

ainsi que des valeurs au temps $t^n = n \Delta t$ ($\Delta t > 0$ fixé plus loin...), constantes dans l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$:

$$(1.2) \quad w^m(x) = w_{j+1/2}^m, \quad j \Delta x < x < (j+1) \Delta x.$$

- On dispose donc d'une condition "initiale" (1.2), qui est associée aux équations de Saint Venant à une dimension d'espace :

$$(1.3) \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

L'idée de Godunov consiste à résoudre le système (1.3) avec la condition initiale pour la variable θ :

$$(1.4) \quad w(x, \theta=0) = w^n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta > 0$$

au moins pour un temps $\theta > 0$ assez petit. On fait pour cela l'hypothèse que le problème de Riemann, composé de l'équation (1.3) et de $(R(w_g, w_d))$ la condition initiale

$$(1.5) \quad w(x, 0) = \begin{cases} w_g, & x < 0 \\ w_d, & x > 0, \end{cases}$$

a une (unique?) solution faible entropique auto-semblable $u(\frac{x}{t}; w_g, w_d)$:

$$(1.6) \quad w(x, t) = u(\frac{x}{t}; w_g, w_d) \text{ solution de (1.3)(1.5)}$$

qui vérifie de plus la propriété de itesse de propagation finie : il existe $a(w_g, w_d) > 0$ de sorte que

$$(1.7) \quad u(\frac{x}{t}; w_g, w_d) = \begin{cases} w_g & \text{si } \frac{x}{t} \leq -a(w_g, w_d) \\ w_d & \text{si } \frac{x}{t} \geq a(w_g, w_d), \end{cases}$$

ainsi qu'illustré à la figure 1.

- Le problème de Cauchy (1.3)(1.4) est donc constitué d'une succession de problèmes de Riemann aux interfaces x_j , on pose

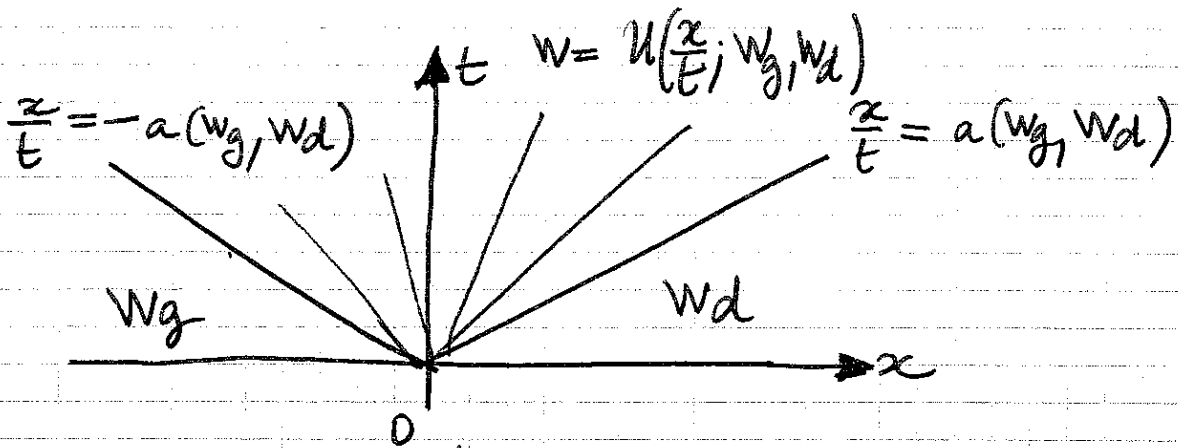


Figure 1. Propriété de vitesse de propagation finie pour les ondes issues du problème de Riemann $R(wg, wd)$: la solution autosemblable, et non triviale pour $|\frac{x}{t}| \leq a(wg, wd)$. Pour $\frac{x}{t} \leq -a(wg, wd)$, elle est égale à wg et pour $\frac{x}{t} \geq a(wg, wd)$, elle est égale à wd d'information qui perturbe la discontinuité (wg, wd) se propage à une vitesse inférieure ou égale à $a(wg, wd)$ en valeur absolue.

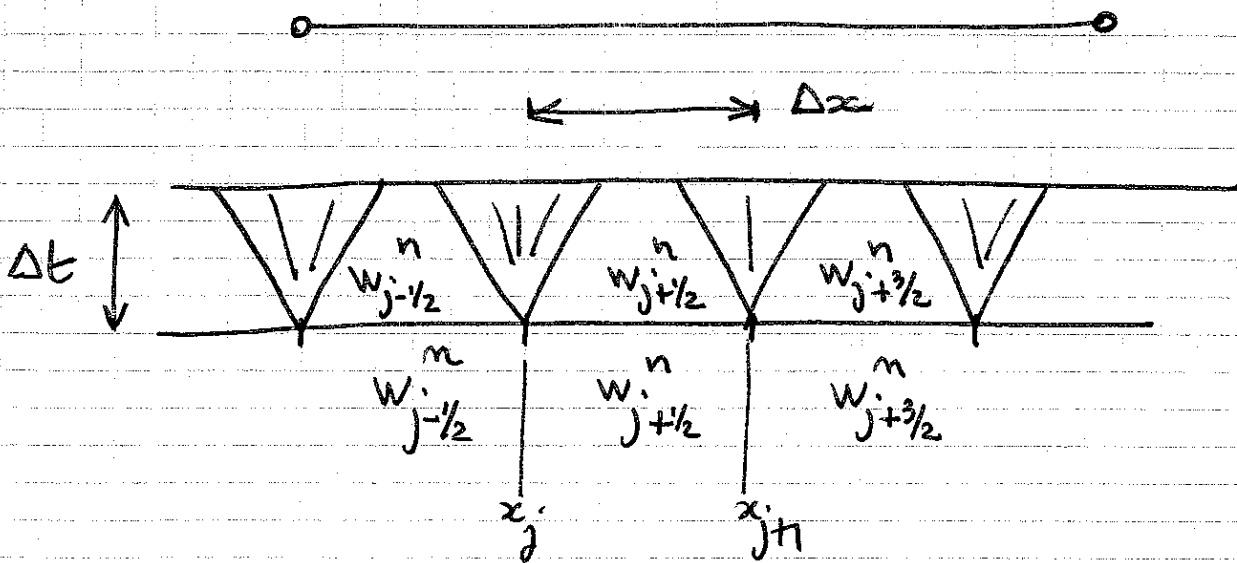


Figure 2 La solution du problème de Cauchy (1.3)(1.4) s'obtient en "recollant" les solutions des problèmes de Riemann posés à chaque interface x_j .

$$(1.8) \quad y \equiv x - x_j, \quad x \in \mathbb{R}$$

et la condition initiale (1.4) fait apparaître le problème de Riemann $\mathcal{R}(w_{j-1/2}^n, w_{j+1/2}^n)$ à l'interface $x = x_j$ (ou $y = 0$):

$$(1.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} f(w) = 0, & y \in \mathbb{R}, \theta > 0 \\ w(y, 0) = \begin{cases} w_{j-1/2}^n & y < 0 \\ w_{j+1/2}^n & y > 0 \end{cases} \end{cases}$$

ainsi qu'illustré figure 2.

• La solution (1.6) prend maintenant la forme

$$(1.10) \quad w(x, \theta) = \mathcal{U}\left(\frac{x - x_j}{\theta}; w_{j-1/2}^n, w_{j+1/2}^n\right), \quad |x - x_j| < \frac{\Delta x}{2}$$

et elle est valable tant que le temps θ n'est pas trop grand, i.e. que l'onde la plus rapide issue de l'interface x_j n'a pas rejoint l'onde la plus lente issue de l'interface x_{j+1} . Pour formaliser cette condition, on suppose que les vitesses d'ondes $a(w_{j-1/2}^n, w_{j+1/2}^n)$ sont uniformément majorées:

$$(1.11) \quad \exists a > 0, \forall n, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad a(w_{j-1/2}^n, w_{j+1/2}^n) \leq a.$$

Le temps $\theta > 0$ doit donc être tel que $x_j + a\theta \leq x_{j+1} - a\theta$, i.e.

$$(1.12) \quad 0 < \theta \leq \Delta t \equiv \frac{\Delta x}{2a} \quad , \quad \frac{a \Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2} \quad ,$$

ce qui introduit une condition de Courant-Friedrich-Lewy de $\frac{1}{2}$ pour le schéma de Godunov.

- Pour $\theta \leq \Delta t$ satisfaisant la condition (1.12), la solution (1.10), juxtaposition de solutions de problèmes de Riemann qui n'interagissent pas entre eux or donc une solution faible entropique du problème de Cauchy (1.3)(1.4). L'idée de Godunov (1955) consiste ensuite à moyenner cette solution (non locale) au temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. On définit $w_{j+1/2}^{n+1}$ par la relation

$$(1.13) \quad w_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x, \Delta t) dx$$

avec $w(\cdot, \cdot)$ défini à la relation (1.10). On pose également

$$(1.14) \quad f_j^{n+1/2} = f(u(0; w_{j-1/2}^n, w_{j+1/2}^n)) \quad , \quad j \in \mathbb{Z}$$

valeur du flux d'interface du problème de Riemann $R(w_{j-1/2}^n, w_{j+1/2}^n)$ posé en $x = x_j$. On a alors

Proposition ① Flux de schéma de Godunov.

Soit $w(x, t)$ la solution faible entropique du problème de Cauchy (1.3)(1.4) et $w_{j+1/2}^{n+1}$ la nouvelle valeur issue de la solution (1.10) par moyenne au temps Δt entre x_j et x_{j+1} (relation (1.13)). Alors,

avec le flux d'interface introduit à la relation (1.14), on a :

$$(1.15) \quad \frac{1}{\Delta t} (w_{j+1/2}^{n+1} - w_{j+1/2}^n) + \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2}) = 0, j \in \mathbb{Z}$$

- Le calcul du nouvel état $w_{j+1/2}^{n+1}$ ne demande que de connaître le flux (physique) de la valeur d'interface $u(0; w_g, w_d)$ pour le problème de Riemann $R(w_g, w_d)$. On pose

$$(1.16) \quad \phi(w_g, w_d) = f(u(0; w_g, w_d)), w_g, w_d \in \Omega,$$

et l'explicitation de la fonction $R \ni \xi \mapsto u(\xi; w_g, w_d) \in \Omega$ sera menée aux paragraphes suivants de ce chapitre.

Preuve de la proposition ①

- Elle consiste à manipuler $w(\cdot, \cdot)$, solution faible (entropique) de (1.3) dans le domaine d'espace temps $]x_j, x_{j+1}[\times]t^n, t^{n+1}[$ [illustré figure 3]. on a :

$$(1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iint_{]x_j, x_{j+1}[\times]t^n, t^{n+1}[} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} \right) dt dx \equiv \int_{\partial(]x_j, x_{j+1}[\times]t^n, t^{n+1}[} \{ w n_t + f(w) n_x \} d\gamma = \end{array} \right.$$

- d'intégrale sur le contour en la somme de quatre intégrales qu'on détaille ci-après :

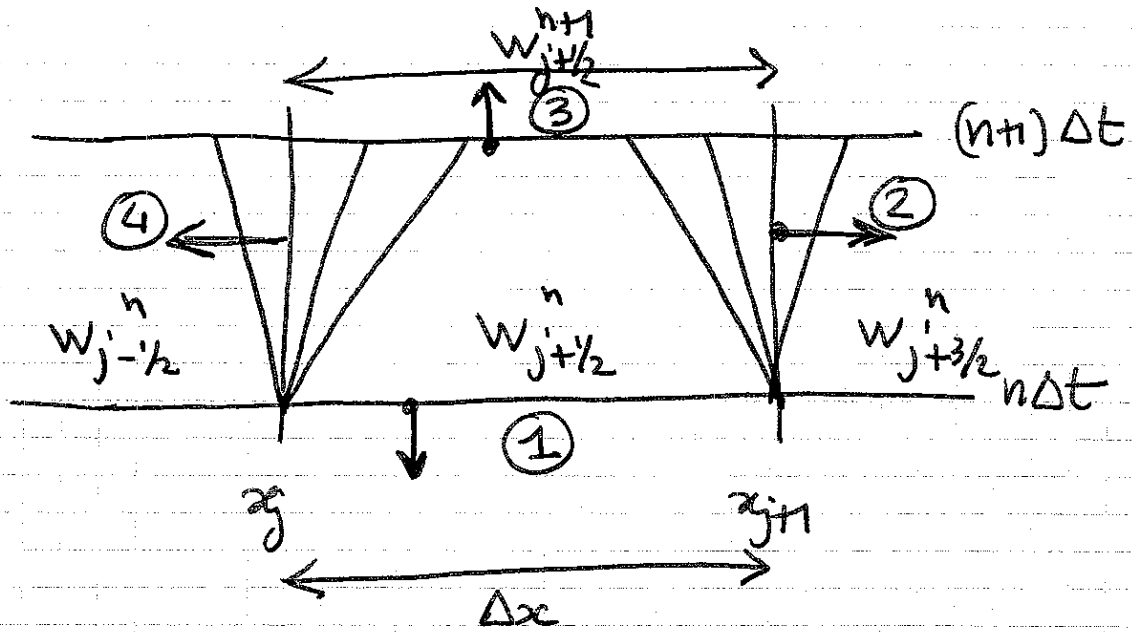


Figure 3 Domaine $]x_j, x_{j+1}[\times]t^n, t^{n+1}[$ pour l'intégration dans l'espace-temps. Son bord est constitué de quatre segments pour lesquels la normale extérieure n prend des valeurs particulièrement simples.



$$\int_{\text{côté (1)}} (w n_t + f(w) n_x) d\sigma = - \int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x, t^n) dx = -\Delta x w_{j+1/2}^n$$

car $n = (n_x = 0, n_t = -1)$ sur le côté (1), où w est constante égale à $w_{j+1/2}^n$ (voir la relation (1.2)). on a pour le côté (2) : $n = (n_x = +1, n_t = 0)$, donc

$$\int_{\text{côté (2)}} (w n_t + f(w) n_x) d\sigma = \int_0^{\Delta t} f(u(\frac{y}{\theta} = 0; w_{j+1/2}^n, w_{j+3/2}^n)) d\theta$$

= $\Delta t f_{j+1}^{n+1/2}$ par définition (1.14) du flux d'interface, qui ne dépend pas de θ car la solution $u(\cdot; w_j, w_d)$ du problème de Riemann

$R(w_g, w_d)$ est supposé autoassemblable. Pour le côté ③, on a $n_x = 0$ et $n_t = +1$, donc

$$\int_{\text{côté ③}} (w n_t + f(w) n_x) d\sigma = \int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x, t = \Delta t) dx$$

$$= \Delta x w_{j+1/2}^{n+1} \quad \text{par définition (1.13)}$$

de la nouvelle valeur moyenne. Enfin, pour le quatrième côté, $n_x = -1$ et $n_t = 0$ et comme pour le second côté, on obtient finalement

$$\int_{\text{côté ④}} (w n_t + f(w) n_x) d\sigma = - \Delta t p_j^{n+1/2}$$

- On somme ces quatre expressions et on écrit l'égalité (1.17). Il vient

$$\Delta x (w_{j+1/2}^{n+1} - w_{j+1/2}^n) + \Delta t (p_{j+1}^{n+1/2} - p_j^{n+1/2}) = 0,$$

ce qui est exactement (1.15) après division par $\Delta t \Delta x$. \square

2) ondes de choc - détente

- Nous savons déjà résoudre le problème de Riemann $R(w_g, w_d)$ dans plusieurs cas particuliers. Fixons d'abord w_g (état de gauche) et $w_d \in \Omega$ de sorte que

$$(2.1) \begin{cases} u_1 = u_g + \frac{2}{\gamma-1} c_g \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_g} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right), \\ v_1 = v_g, \quad p_1 \leq p_g. \end{cases}$$

La solution du problème de Riemann $R(w_g, w_1)$ est une onde de détente issue de w_g et pour $\xi \in [u_g - c_g, u_1 - c_1]$, l'état $(u(\xi; w_g, w_1))$ est donné par les relations $w(\xi) =$

$$(2.2) \quad u - c = \xi, \quad u + \frac{2c}{\gamma - 1} = u_g + \frac{2c_g}{\gamma - 1}, \quad v = v_g.$$

La solution de $R(w_g, w_1)$ s'écrit donc

$$(2.3) \quad \begin{cases} w_g, & \xi \leq u_g - c_g \\ w(\xi), & u_g - c_g \leq \xi \leq u_1 - c_1 \\ w_1, & \xi \geq u_1 - c_1, \quad \xi \equiv \frac{x}{t} \end{cases}$$

or elle est illustrée à la figure 4

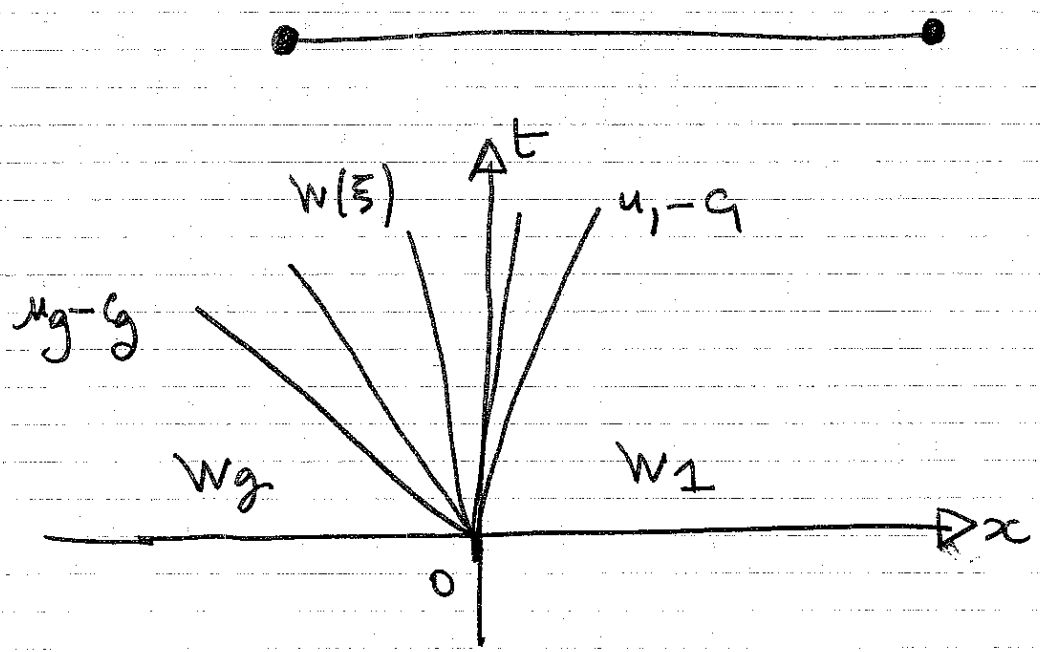


Figure 4 1. onde de détente issue de l'état w_g ; solution dans l'espace-temps du problème de Riemann $R(w_g, w_1)$

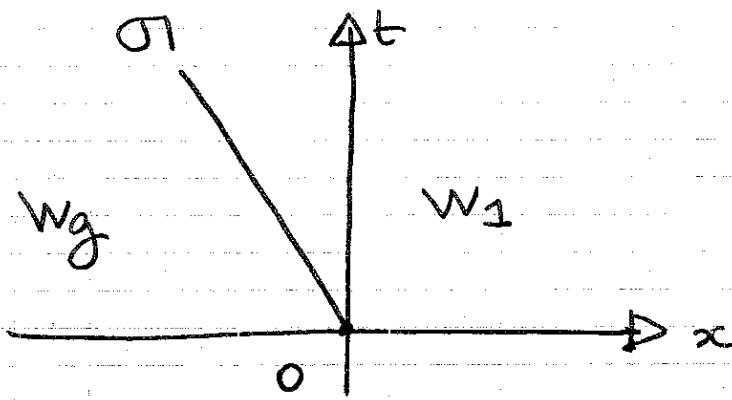


Figure 5. 1. onde de choc issue de l'état w_g ;
 représentation dans l'espace-temps de la solution
 du problème de Riemann $R(w_g, w_1)$



- De manière analogue, soit $w_1 \in \Omega$ de sorte que

$$(2.4) \quad u_1 = u_g - \sqrt{\frac{(p_1 - p_g)(\rho_1 - \rho_g)}{\rho_1 \rho_g}}, \quad v_1 = v_g, \quad p_1 \geq p_g$$

Alors le problème de Riemann $R(w_g, w_1)$ a pour solution
 une 1. onde de choc issue de w_g ; on introduit la
 célérité σ_1 qui s'écrit

$$(2.5) \quad \sigma_1 = u_g - \sqrt{\frac{p_1}{\rho_g}} \sqrt{\frac{p_1 - p_g}{\rho_1 \rho_g}} = u_1 - \sqrt{\frac{p_g}{\rho_1}} \sqrt{\frac{p_1 - p_g}{\rho_1 - p_g}}$$

et qui vérifie (c'est la condition d'entropie).

$$(2.6) \quad u_1 - c_1 \leq \sigma_1 \leq u_g - c_g.$$

La solution $U(\xi; w_g, w_1)$ prend maintenant la forme
 (voir la figure 5):

$$(2.7) \quad U(\xi; w_g, w_1) = \begin{cases} w_g, & \xi < \sigma_1 \\ w_1, & \xi > \sigma_1. \end{cases}$$

11

L'ensemble des états $w_1 \in \Omega$ qui vérifie (2.1) ou (2.4) s'écrit sous la forme

$$(2.8) \quad u_1 = \varphi_1(p_1, w_g), \quad u_2 = v_g,$$

où l'on a posé

$$(2.9) \quad \varphi_1(p, w_0) \equiv \begin{cases} u_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1} \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right), & p < p_0 \\ u_0 - \sqrt{\frac{(p-p_0)(e-p_0)}{p p_0}}, & p > p_0. \end{cases}$$

on a la

Proposition 2 Raccord C^2 de l'onde de choc détente.

La fonction $p \mapsto \varphi_1(p, w_0)$ définie à la relation (2.9) est deux fois dérivable en $p = p_0$; si on pose

pose

$$(2.10) \quad p = p_0 (1 + \theta),$$

on a

$$(2.11) \quad \varphi_1(p, w_0) = u_0 - c_0 \theta + \frac{3-\gamma}{4} c_0 \theta^2 + O(\theta^3).$$

Preuve de la proposition 2

• on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} &= \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = (1+\theta)^{\frac{\gamma-1}{2}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \theta + \frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{2} (\frac{\gamma-1}{2} - 1) \theta^2 + O(\theta^3) \\ &= 1 + \frac{\gamma-1}{2} \theta + \frac{1}{4} (\gamma-1) \frac{\gamma-3}{2} \theta^2 + O(\theta^3), \text{ donc} \end{aligned}$$

$$\varphi_1(p) = u_0 - c_0 \theta + \frac{3-\gamma}{4} c_0 \theta^2 + O(\theta^3) \quad \text{si } \theta < 0$$

ce qui établit la relation (2.11) pour la 1. onde de détente.

- Dans le cas du 1. choc, on a $\theta > 0$ et

$$\frac{(p-p_0)(p-p_0)}{p_0} = \frac{p_0^{r+1} ((1+\theta)^r - 1) \theta}{p_0^2 (1+\theta)}$$

$$= p_0^{r-1} \frac{\theta (r\theta + \frac{1}{2} r(r-1)\theta^2 + o(\theta^3))}{1+\theta}$$

$$= r p_0^{r-1} \theta^2 \frac{1 + \frac{r-1}{2} \theta + o(\theta^2)}{1+\theta}, \text{ donc}$$

$$\sqrt{\frac{(p-p_0)(p-p_0)}{p_0}} = c_0 \theta \left(1 + \frac{r-1}{4} \theta - \frac{\theta}{2} + o(\theta^2) \right)$$

$$= c_0 \theta \left(1 + \frac{r-3}{4} \theta \right) + o(\theta^2)$$

ce qui montre (2.11) pour $\theta > 0$.

- on a alors égalité des nombres dérivés $\varphi'(p_0)$ de part et d'autre de p_0 ; il en est de même pour la dérivée seconde compte tenu du développement (2.11), ce qui montre la propriété. \square

- Le graphe de la fonction $p \mapsto \varphi_1(p, w_0)$ est représenté à la figure 6

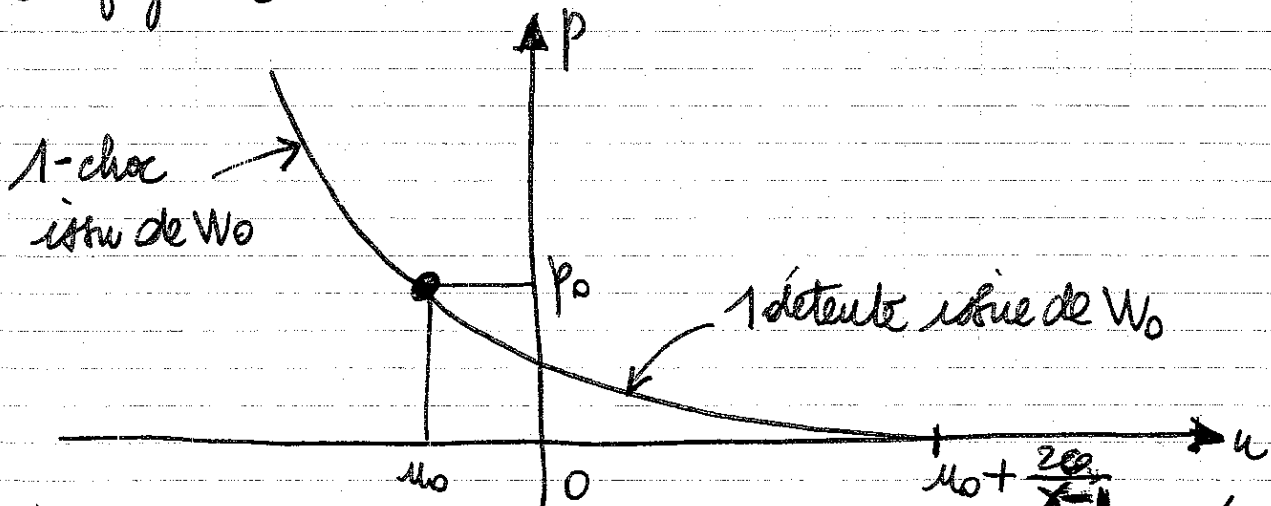


Figure 6 1. onde de choc détente $p \mapsto \varphi_1(p, w_0)$ représentée dans le plan vitesse-pression.

- Nous disposons aussi des solutions particulières du problème de Riemann $R(W_2, W_d)$ avec la 3-détente qui aboutit à W_d . Soit $W_2 \in \Omega$ de sorte que

$$(2.12) \begin{cases} u_2 = u_d - \frac{2}{\gamma-1} c_d \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_d} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right), \\ v_2 = v_d, \quad p_2 \leq p_d. \end{cases}$$

Nous notons $W(\xi)$ l'état de vitesse u , vitesse du son c , satisfaisant aux relations caractéristiques des 3-ondes de détente:

$$(2.13) \quad u + c = \xi, \quad u - \frac{2c}{\gamma-1} = u_d - \frac{2c_d}{\gamma-1}, \quad v = v_d.$$

Alors la solution dans l'espace-temps du problème de Riemann $R(W_2, W_d)$ prend la forme

$$(2.14) \begin{cases} W_2, & \xi \equiv \frac{x}{t} \leq u_0 + c_0 \\ W(\xi), & u_0 + c_0 \leq \xi \leq u_d + c_d \\ W_d, & \xi \geq u_d + c_d \end{cases}$$

et on l'illustre figure 7.

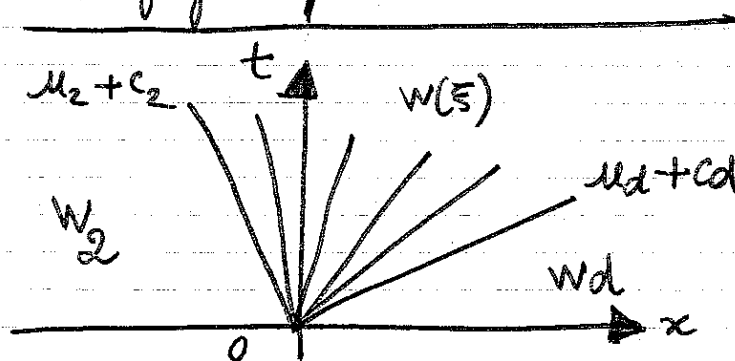


Figure 7 3 ondes de détente aboutissant à l'état W_d ; solution dans l'espace-temps du problème de Riemann $R(W_2, W_d)$.

• Dans le cas d'un 3 choc, on introduit $w_2 \in \Omega$ qui vérifie les relations

$$(2.15) \quad u_2 = u_d + \sqrt{\frac{(p_2 - p_d)(\rho_2 - \rho_d)}{\rho_2 \rho_d}}, \quad v_2 = v_d, \quad p_2 \geq p_d.$$

ainsi que la célérité σ_3 :

$$(2.16) \quad \sigma_3 = u_d + \sqrt{\frac{p_2}{\rho_d}} \sqrt{\frac{p_2 - p_d}{\rho_2 - \rho_d}} = u_2 + \sqrt{\frac{\rho_d}{\rho_2}} \sqrt{\frac{p_2 - p_d}{\rho_2 \rho_d}}$$

qui vérifie les inégalités d'entropie (de Lax) :

$$(2.17) \quad u_d + c_d \leq \sigma_3 \leq u_2 + c_2.$$

alors la solution $U(\xi; w_2, w_d)$ du problème de Riemann $R(w_2, w_d)$ s'exprime sous la forme

$$(2.18) \quad U(\xi; w_2, w_d) = \begin{cases} w_2, & \xi < \sigma_3 \\ w_d, & \xi > \sigma_3 \end{cases}$$

et est illustrée à la figure 8.

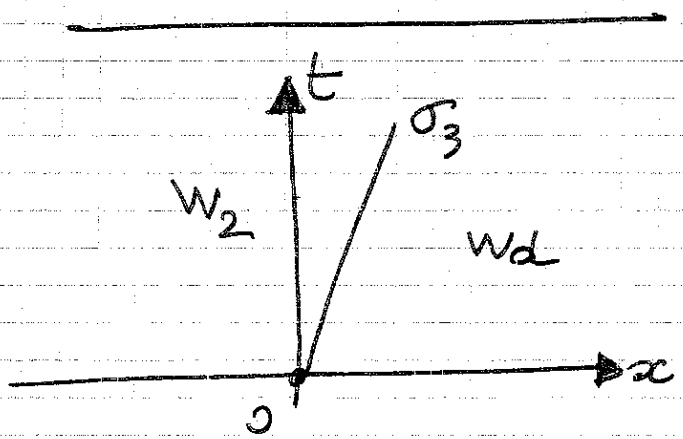


Figure 8 3. onde de choc qui aboutit à l'état w_d ; on a représenté dans l'espace temps la solution du problème de Riemann $R(w_2, w_d)$.

On regroupe la 3. détente et le 3. choc en considérant l'ensemble des états $w_2 \in \Omega$ qui vérifient la relation (2.13) ou la relation (2.15). On pose

$$(2.19) \quad \varphi_3(p; w_0) \equiv \begin{cases} u_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right], & p \leq p_0 \\ u_0 + \sqrt{\frac{(p-p_0)(p-p_0')}{\rho \rho_0}}, & p \geq p_0. \end{cases}$$

Alors la 3. onde de choc-détente aboutissant à w_d est constituée des états $w_2 \in \Omega$ de sorte que

$$(2.20) \quad u_2 = \varphi_3(p_2, w_d), \quad v_2 = v_d.$$

Elle est illustrée à la figure 9 on a la

Proposition 3 Raccord de classe C^2 de la 3. onde de choc-détente. La fonction $p \mapsto \varphi_3(p, w_0)$ définie à la relation (2.19) est deux fois dérivable en $p = p_0$. avec la notation (2.10), on a

$$(2.21) \quad \varphi_3(p, w_0) = u_0 + c_0 \theta - \frac{3-\gamma}{4} c_0 \theta^2 + O(\theta^3).$$

La preuve est laissée en exercice.

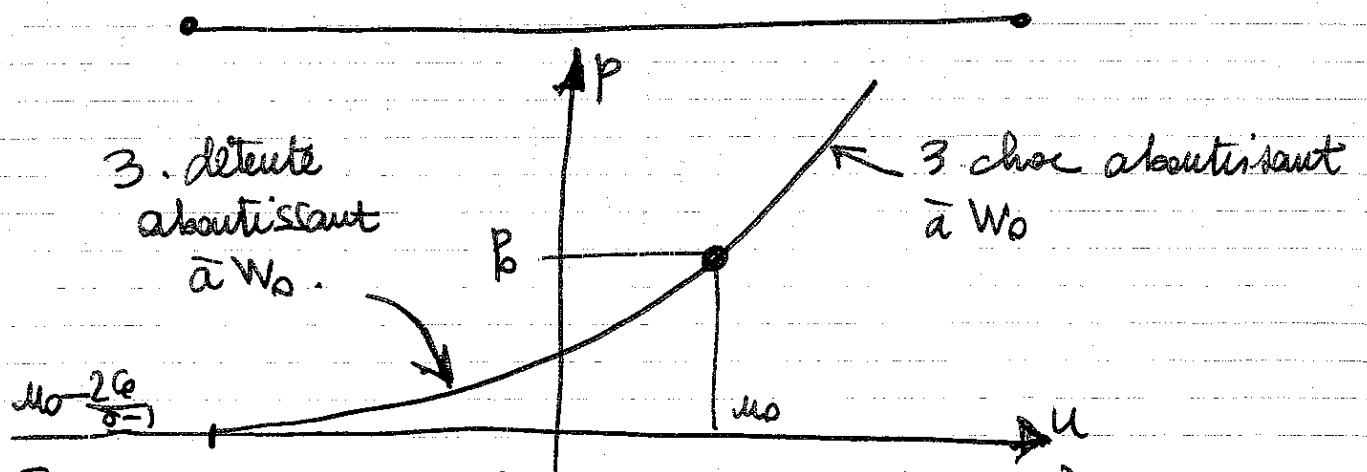


Figure 9 3 onde de choc-détente $p \mapsto \varphi_3(p, w_0)$ dans le plan (vitesse, pression).

3) Discontinuité de contact

- Nous détaillons dans ce paragraphe l'onde associée au second champ caractéristique pour laquelle nous avons

$$(3.1) \quad \lambda_2(w) = u,$$

et la valeur propre est dégénérée : elle est elle-même un invariant de Riemann. Soit $r_2(w)$ le (un!) vecteur propre pour la matrice jacobienne, associé à la valeur propre λ_2 :

$$(3.2) \quad df(w) \cdot r_2(w) = \lambda_2(w) r_2(w).$$

Alors le gradient de λ_2 dans la direction de ce vecteur propre est nul (voir le chapitre 3) :

$$(3.3) \quad \nabla \lambda_2(w) \cdot r_2(w) = 0, \quad \forall w \in \Omega.$$

Ainsi, si $\xi \mapsto w(\xi) \in \Omega$ est une solution de l'équation différentielle

$$(3.4) \quad \frac{dw}{d\xi} = \alpha(\xi) r_2(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

on a

$$(3.5) \quad u(w(\xi)) = \text{constante}, \quad \forall \xi$$

comme le prouve le calcul qui suit :

$$\frac{du}{d\xi} = \nabla u \cdot \frac{dw}{d\xi} = \nabla \lambda_2 \cdot (\alpha(\xi) r_2(w)) = \alpha(\xi) \cdot \nabla \lambda_2 \cdot r_2 = 0$$

- Le second invariant de Riemann peut s'identifier à la pression :

$$(3.6) \quad \nabla p \cdot r_2(w) = 0, \quad \forall w \in \Omega.$$

on a alors, sur une courbe qui satisfait à l'équation différentielle (3.4) :

$$(3.7) \quad p(w(\xi)) = \text{constante}$$

à l'aide d'un calcul analogue à celui fait pour la vitesse. Nous en déduisons que seule la vitesse tangentielle v peut varier pour $\xi \mapsto w(\xi) \in \Omega$ qui satisfait à (3.4).

Proposition (4) Relation de Rankine et Hugoniot.

Soit $[0,1] \ni \xi \mapsto w(\xi) \in \Omega$ une solution de l'équation (3.4) telle que $w(0) = w_1$, $w(1) = w_2$, de vitesse commune u^* :

$$(3.8) \quad u_0 = u_1 = u^*.$$

on a alors la relation de Rankine - Hugoniot :

$$(3.9) \quad f(w_2) - f(w_1) = u^*(w_2 - w_1).$$

- Dans l'espace-temps, w_0 est relié à w_1 par une discontinuité de contact. C'est une onde formée dans l'espace-temps par deux états constants, donnée par

$$(3.10) \quad w(x,t) = \begin{cases} w_1, & \frac{x}{t} < u^* \\ w_2, & \frac{x}{t} > u^* \end{cases}.$$

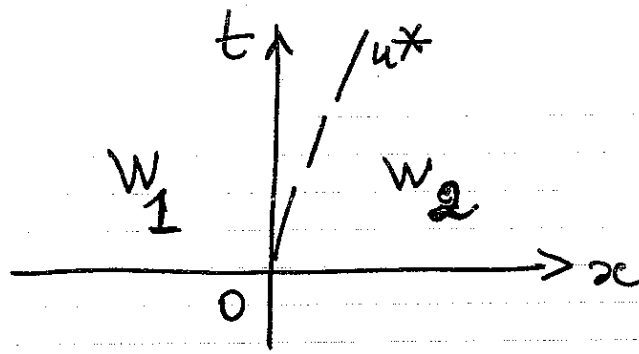


Figure 10. Solution dans l'espace temps du problème de Riemann $R(w_1, w_2)$, où $p(w_1) = p(w_2)$ et $u(w_1) = u(w_2) = u^*$. d'unique onde est une discontinuité de contact.

Elle est illustrée à la figure 10.

Preuve de la proposition (4)

- on donne d'abord une preuve "élémentaire", qui utilise explicitement le fait que w_1 et w_2 ont même vitesse (relation (3.8)) et même pression :

$$(3.11) \quad p(w_1) = p(w_2) = p^*$$

Alors w_1 et w_2 ont même densité ρ^* , donc

$$(3.12) \quad \begin{cases} w_1 = (\rho^*, \rho^* u^*, \rho^* v_1)^t \\ w_2 = (\rho^*, \rho^* u^*, \rho^* v_2)^t \end{cases}$$

puisque seule les vitesses tangentiels diffèrent. On en déduit donc $w_2 - w_1 = (0, 0, \rho^* [v])^t$.

Par ailleurs

$$(3.13) \quad f(w_j) = (\rho^* u^*, \rho^* u^{*2} + p^*, \rho^* u^* v_j)^t, \quad j=1,2$$

Donc $f(w_2) - f(w_1) = (0, 0, \rho^* u^* [v])^t$, ce qui montre la relation (3.9).

• La preuve classique est élégante également ; on ¹⁹

a :

$$f(w_2) - f(w_1) = \int_0^1 df(w) \cdot \frac{dw}{d\xi} d\xi$$

$$= \int_0^1 df(w) \cdot \alpha(\xi) r_2(\xi) d\xi \quad w(3.4)$$

$$= \int_0^1 \alpha(\xi) \underbrace{u(w(\xi))}_{\text{constante}} r_2(\xi) d\xi \quad w(3.2)$$

$$= u^* \int_0^1 \alpha(\xi) r_2(w(\xi)) d\xi \quad vu(3.5)$$

$$= u^* \int_0^1 \frac{dw}{d\xi} d\xi \quad vu(3.4)$$

$$= u^* (w_2 - w_1) .$$



• Une discontinuité de contact est associée à une valeur nulle du flux de masse :

$$(3.14) \quad m \equiv \rho(u - \sigma) = 0 \quad \text{pour une discontinuité de contact}$$

En effet, $m = \rho^*(u_2 - u^*) = 0$ et m est continu à travers la discontinuité. Une discontinuité de contact doit être distinguée d'une onde de choc pour laquelle on suppose $m \neq 0$. Elle correspond à la branche " $m=0$ " exclue lorsque nous avons étudié les relations de Rankine et Hugoniot au chapitre précédent.

Proposition (5) A travers une discontinuité de contact, la dissipation d'entropie est nulle.

Preuve de la proposition (5)

- Rappelons que si $\Omega \ni w \mapsto \eta(w) \in \mathbb{R}$ désigne une entropie mathématique pour les équations de Saint Venant, de flux associé $\Omega \ni w \mapsto \xi(w) \in \mathbb{R}$, tel que

$$(3.15) \quad d\xi(w) = d\eta(w) \cdot df(w), \quad w \in \Omega,$$

la dissipation d'entropie \mathcal{D} à travers la discontinuité (w_1, w_2) de pente $\sigma = u^*$ s'exprime par

$$(3.16) \quad \mathcal{D} = \xi(w_2) - u^* \eta(w_2) - (\xi(w_1) - u^* \eta(w_1))$$

(voir la relation (3.19) du chapitre précédent). On a alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \xi(w_2) - \xi(w_1) - u^* (\eta(w_2) - \eta(w_1)) \\ &= \int_0^1 d\xi(w(\theta)) \cdot \frac{dw}{d\theta} d\theta - u^* \int_0^1 d\eta(w(\theta)) \cdot \frac{dw}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^1 d\eta(w(\theta)) \cdot df(w(\theta)) \frac{dw}{d\theta} d\theta - u^* \int_0^1 d\eta(w) \frac{dw}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^1 d\eta(w(\theta)) \cdot [df(w) \alpha r_2(w) - u^* \alpha r_2(w)] d\theta \\ &= 0 \quad \text{compte tenu de (3.1)(3.2),} \end{aligned}$$

cf (3.15)(3.4)

ce qui établit la propriété. \square

4) Construction d'une solution du problème de Riemann.

- On se donne un état $w_g \in \Omega$ "à gauche", un état $w_d \in \Omega$ "à droite", et on cherche une solution (faible, entropique, autossemblable) $u(\frac{x}{\epsilon}; w_g, w_d)$ du problème de Riemann $R(w_g, w_d)$ défini par la loi de conservation

$$(4.1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

et la condition initiale

$$(4.2) \quad w(x, 0) = \begin{cases} w_g, & x < 0 \\ w_d, & x > 0. \end{cases}$$

- Nous allons construire une solution dans l'espace des états Ω puis dans l'espace-temps (x, t) de la façon suivante. on cherche deux états intermédiaires w_1 et w_2 de sorte que

(4.3) w_1 est issu de w_g par une 1. onde de choc-détente

(4.4) w_1 et w_2 sont reliés par une discontinuité de contact

(4.5) w_d est issu de w_2 par une 3. onde de choc-détente.

on peut écrire cette dernière condition sous la forme

(4.6) w_2 appartient à une 3. onde de choc-détente aboutissant à w_d .

- Nous exploitons la condition (4.4). Nous notons u^* la vitesse commune à w_1 et w_2 et p^* leur

pression commune

$$(4.7) \quad u(w_1) = u(w_2) = u^*$$

$$(4.8) \quad p(w_1) = p(w_2) = p^*$$

Ensuite, comme w_1 appartient à la 1-onde issue de w_g , on sait que la vitesse tangentielle v_1 est égale à v_g (relation (2.1) dans le cas d'une 1-onde de détente, relation (2.4) pour une 1-onde de choc) :

$$(4.9) \quad v_1 = v_g$$

Il en est de même pour la 3-onde aboutissant à w_d (relation (2.12) pour une 3- détente et (2.13) pour un 3- choc) :

$$(4.10) \quad v_2 = v_d$$

Nous venons donc de réduire le problème à la recherche de la vitesse u^* et de la pression p^* , communes aux deux états intermédiaires.

- Nous exprimons maintenant en termes de vitesse et pression que w_1 est issu de w_g par une 1-onde de choc détente :

$$(4.11) \quad u^* = \varphi_1(p^*, w_g) \quad (\text{relation (2.8)})$$

et que w_2 appartient à une 3- onde de choc-détente qui aboutit à w_d :

$$(4.12) \quad u^* = \varphi_3(p^*, w_d) \quad (\text{relation (2.20)}) ,$$

les fonctions $p \mapsto \varphi_1(p, w_0)$ et $p \mapsto \varphi_3(p, w_0)$ ayant été définies aux relations (2.9) et (2.19). La pression p^* est donc solution de l'équation obtenue en éliminant la vitesse u^*

$$(4.13) \quad \varphi_1(p^*, w_g) = \varphi_3(p^*, w_d)$$

ainsi qu'illustré à la figure 11.

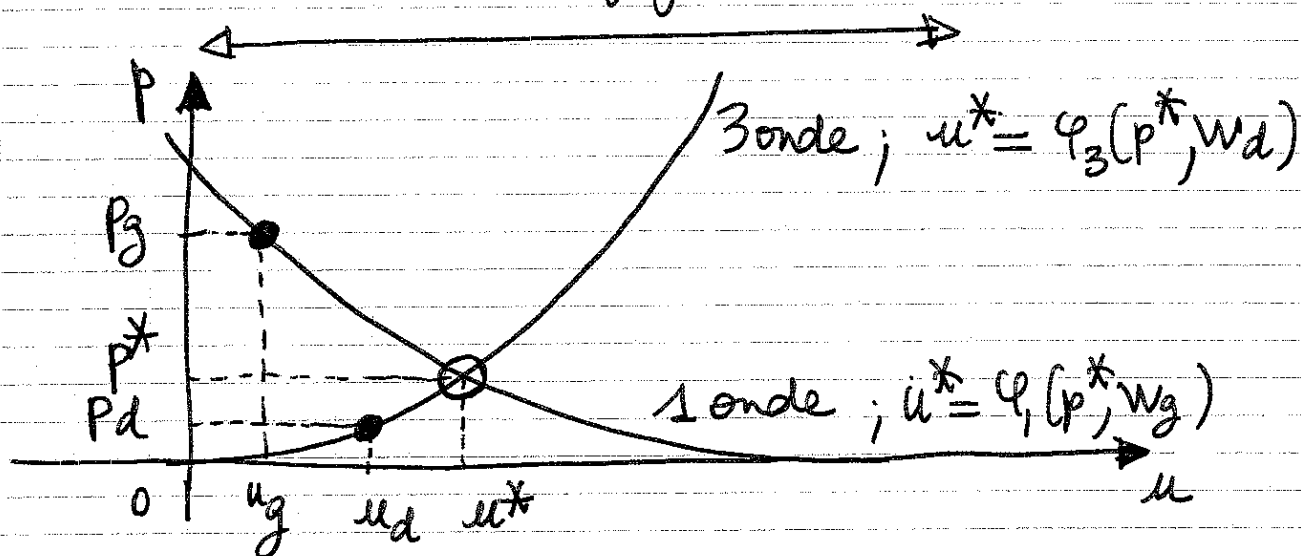


Figure 11 Résolution du problème de Riemann $R(w_g, w_d)$ dans le plan vitesse - pression, afin d'évaluer la vitesse intermédiaire u^* et la pression intermédiaire p^*

- La résolution de l'équation (4.13) doit en général être menée numériquement. Nous donnons dans le paragraphe qui suit l'essentiel pour programmer le calcul effectif conjoint de u^* et p^* . On commence par approximer les fonctions $p \mapsto \varphi_1(p, w_g)$ et $p \mapsto \varphi_3(p, w_d)$ par l'acoustique

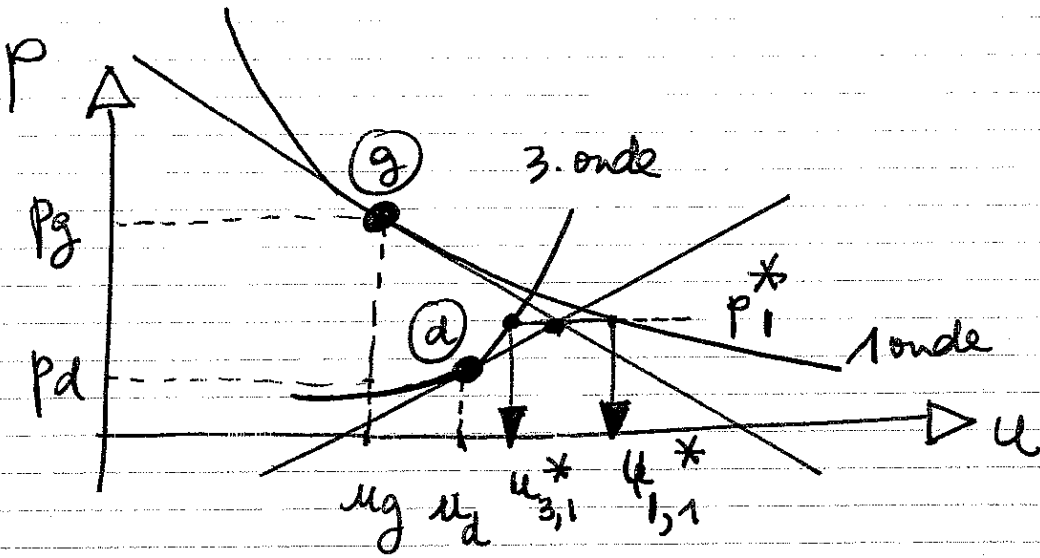


Figure 12. Initialisation de l'algorithme de Newton pour la résolution de l'équation (4.13)

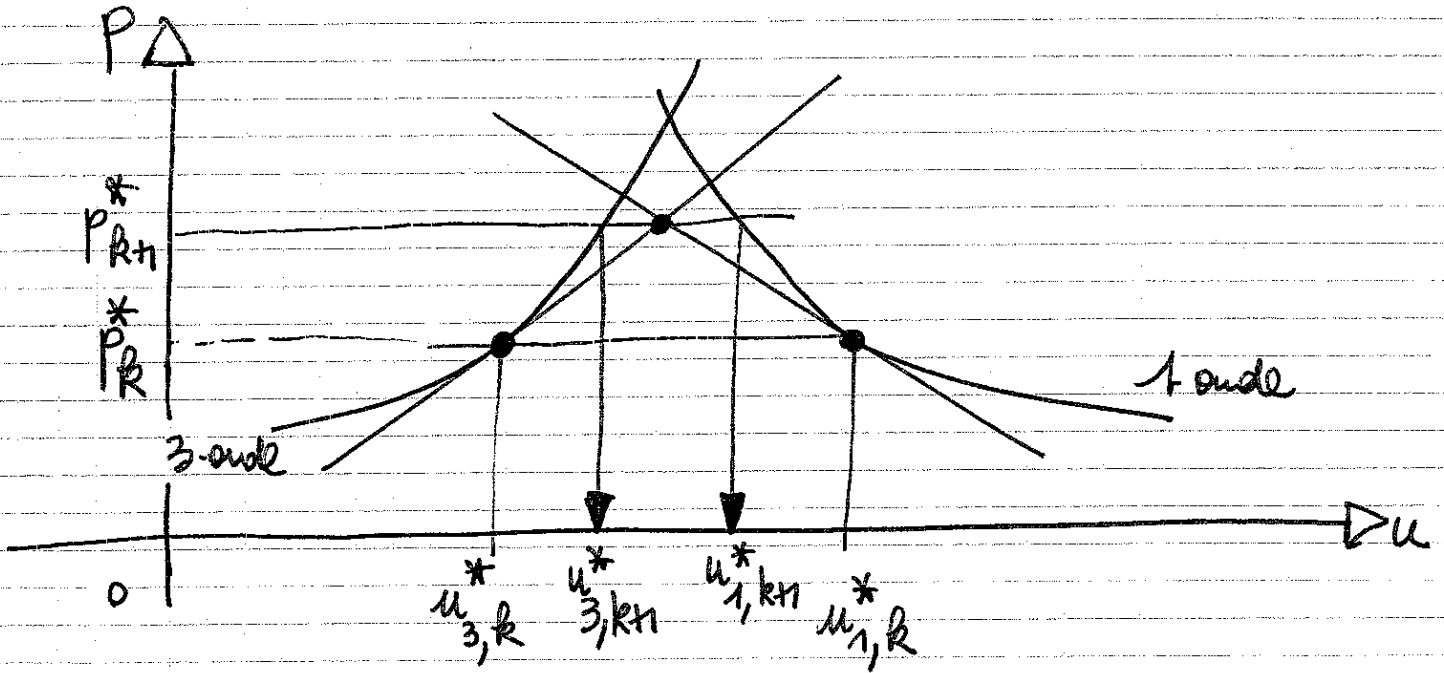


Figure 13. Itération de l'algorithme de Newton pour la résolution de l'équation (4.13)

ie les tangentes en $p = p_g$ et $p = p_d$ respectivement, grâce aux relations (2.11) et (2.21):

$$(4.14) \quad u = u_g - \frac{1}{\gamma} c_g \left(\frac{p}{p_g} - 1 \right), \quad 1 \text{ onde}$$

$$(4.15) \quad u = u_d + \frac{1}{\gamma} c_d \left(\frac{p}{p_d} - 1 \right), \quad 3 \text{ onde},$$

ainsi qu'illustré à la figure 12. La première estimation p_1^* de la pression s'obtient en éliminant la vitesse u entre les relations (4.14) et (4.15):

$$(4.16) \quad p_1^* = \frac{\gamma u_g + c_g - (\gamma u_d - c_d)}{\frac{c_g}{p_g} + \frac{c_d}{p_d}}$$

on note $u_{1,1}^*$ et $u_{3,1}^*$ les vitesses recalculées à l'aide des fonctions φ_1 et φ_3 respectivement (voir la figure 12!):

$$(4.17) \quad u_{1,1}^* = \varphi_1(p_1^*, w_g); \quad u_{3,1}^* = \varphi_3(p_1^*, w_d).$$

- d'itération de l'algorithme suit le même principe. On suppose donné une pression p_k^* , approximation après l'étape k de la pression intermédiaire p^* . on calcule explicitement les deux approximations $u_{1,k}^*$ et $u_{3,k}^*$ sur la courbe de 1. détente et de 3. choc détente respectivement:

$$(4.18) \quad u_{1,k}^* = \varphi_1(p_k^*, w_g), \quad u_{3,k}^* = \varphi_3(p_k^*, w_d).$$

Puis on fait une approximation linéaire de φ_1 et φ_3 au voisinage de p_k^* (voir la figure 13):

$$(4.19) \quad u = u_{1,k}^* + \varphi_1'(p_k^*, w_g)(p - p_k^*)$$

$$(4.20) \quad u = u_{3,k}^* + \varphi_3'(p_k^*, w_d)(p - p_k^*)$$

Et on calcule l'intersection de ces deux droites, sans difficulté puisque $\varphi_1' < 0$ et $\varphi_3' > 0$:

$$p_{R+1}^* = \frac{u_{1,k}^* + (\varphi_3'(p_k^*, w_d) - \varphi_1'(p_k^*, w_d))p_k^* - u_{3,k}^*}{\varphi_3'(p_k^*, w_d) - \varphi_1'(p_k^*, w_g)}$$

soit

$$(4.21) \quad p_{R+1}^* = p_k^* - \frac{u_{3,k}^* - u_{1,k}^*}{\varphi_3'(p_k^*, w_d) - \varphi_1'(p_k^*, w_g)}$$

- En pratique, l'algorithme (4.21)(4.19) converge en quelques itérations, Nous notons aussi que nous n'avons pas traité ici le "cas d'apparition du vide", ou

$$(4.22) \quad u_g + \frac{2}{\gamma-1} C_g < u_d - \frac{2}{\gamma-1} C_d,$$

renvoyant ce cas spécifique à un travail personnel du lecteur !

- Nous disposons donc d'un couple (u^*, p^*) , donc de deux états intermédiaires w_1 et w_2 de sorte que les relations (4.3) à (4.5) ont lieu. Nous mentionnons maintenant qu'on peut achever la résolution du problème de Riemann dans l'espace-temps, il que pour $\xi \equiv \frac{x}{t} < u^*$, on peut effectivement construire la 1. onde allant de w_g à w_1 et qu'il en est de même de la 3. onde allant

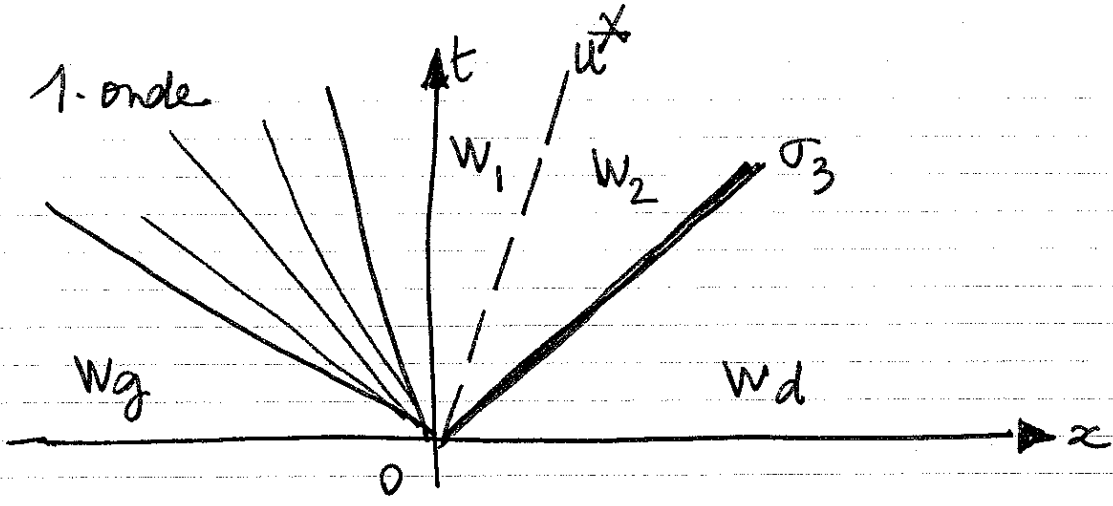


Figure 14 Construction typique de la solution $(x, t) \mapsto u(x, t; w_g, w_d)$ dans l'espace-temps. Une 1-onde (de détente dans l'exemple choisi) relie w_g à w_1 et une 3-onde (de choc dans ce cas particulier) relie w_2 à w_d . Les deux états intermédiaires w_1 et w_2 ne diffèrent que par la valeur de leur vitesse tangentielle.



de w_2 à w_d lorsque $\xi > u^*$ (voir la figure 14).
 Nous le vérifions pour la 1-onde et laissons le cas de la 3-onde en exercice.

- La 1-onde est une détente si $p^* < p_g$ et alors $u^* > u_g$ (voir la figure 6). Dans ce cas, on a

$$(4.23) \quad u_g - c_g < u^* - c_1 < u^*$$

et l'onde de détente est non constante pour $\xi = \frac{x}{t} \in [u_g - c_g, u^* - c_1]$, intervalle qui est bien niché dans $]-\infty, u^*[$. Donc on peut "placer" la 1-onde dans ce domaine d'espace-temps dans ce premier cas. Si $p^* > p_g$ (et alors $u^* < u_g$)

on a alors nécessairement la relation (2.6) qui s'écrit avec les notations présentes

$$(4.24) \quad u^* - c_1 \leq \sigma_1 \leq u_g - c_g.$$

Mais on a alors aussi (relation (2.5)!) :

$$(4.25) \quad \sigma_1 \leq u^*$$

ce qui montre que l'onde de choc

$$(4.26) \quad u\left(\frac{x}{t}; w_g, w_1\right) = \begin{cases} w_g, & \frac{x}{t} < \sigma_1 \\ w_1, & \frac{x}{t} > \sigma_1 \end{cases}$$

est non-triviale dans le domaine $]-\infty, u^*[$

- La construction finale de la solution $u\left(\frac{x}{t}; w_g, w_d\right)$ peut donc s'écrire récursivement au moyen des ondes déjà introduites

$$(4.27) \quad u\left(\frac{x}{t}; w_g, w_d\right) = \begin{cases} u\left(\frac{x}{t}; w_g, w_1\right), & \frac{x}{t} < u^* \\ u\left(\frac{x}{t}; w_2, w_d\right), & \frac{x}{t} > u^*. \end{cases}$$

Pour le schéma de Godunov, seule la valeur de l'état correspondant à $\frac{x}{t} = 0$ doit être utilisée, ce qui permet de ne rechercher dans le dictionnaire qu'une des deux ondes vraiment non linéaires.

Jubon
avril 2005.