le cnam

Mathématiques Appliquées pour le Génie des Procédés et l'Energétique

Paris, automne 2018

Manipulation d'expressions algébriques

Notes du cours 01

Amélie Danlos, Marie Debacq, François Dubois

MAGPE (1)

Manipulation d'expressions algébriques

F. Dubois

10 octobre 2018.

(1) Des nombres aux polynômes.

- On écrit les nombres de droite à gauche. Ainsi,

$$2018 = 8 + (1 \times 10) + (0 \times 100) + (2 \times 1000).$$

Le nombre 2018 est donc écrit dans la "base" 10. Si cette base est "évidente", car on a dix doigts, elle n'est pas la seule. Ainsi, la base 20 était utilisée par la civilisation Maya en Amérique latine et aussi en Bretagne. En France, on dit "quatre-vingts", au lieu de "octante", plus logique et utilisé en Belgique...

La base soixante a été choisie par les Babyloniens (de -1900 à -1600, avant J.C.). En effet, l'année a environ 360 jours, soit six "soixantaines". La base 60 est présente dans notre quotidien : une heure égale soixante minutes et une minute égale soixante secondes.

Enfin, la base deux, avec ses seuls chiffres zéro et un, a été popularisée par l'informatique qui utilise des composants binaires.

- On pourrait écrire "2018" sous la forme "2 18", avec un espace vide à la place du zéro. C'est probablement une notation qui a été utilisée durant de longues années. Avec une écriture des nombres ambigüe ; "2 18" signifie-t-il 2018 ou 20018 ?
  Afin de remédier à ce défaut d'écriture, Brahmagupta (Inde, 598-628) invente "zéro" afin de donner un nom à cet espace vide. Il invente ainsi un nombre qui est "avant" l'unité, le premier nombre.

- L'étape suivante consiste à remplacer les chiffres et les nombres par des lettres. Il s'agit d'un très long processus d'évolution du langage mathématique. Avant cette notation, on décrivait des expressions algébriques avec des mots !
  Ainsi, Al-Khwârizmi (Bagdad, 680-750 après JC) invente l'algèbre dans un traité qui laisse une grande place au calcul des héritages. Pour parler de l'équation $x^2=5x$, il écrit : "un carré est égal à cinq racines".
  Au 15° siècle, l'équation "$3x^2+x=4$" est énoncée ainsi : "trois fois l'arithme multipliée par

lui-même, augmenté de cet arithme, font quatre".

François Viète (France, 1540-1603) décide de représenter par des lettres les quantités connues [on utilise souvent les premières lettres de l'alphabet latin ou grec a, b, c, α, β, etc.] et également les quantités inconnues [et la lettre x est alors souvent mise en exergue].

- On peut alors généraliser le nombre 2018 en remplaçant les chiffres par des lettres :

  $10 \Leftrightarrow b$, la "base"

  $8 \Leftrightarrow a_0$, $1 \Leftrightarrow a_1$, $0 \Leftrightarrow a_2$, $2 \Leftrightarrow a_3$

  et le nombre 2018 s'écrit maintenant

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 .$$

Notons que l'écriture $b^2 = b.b$ est proposée par René Descartes en 1637. L'expression précédente nous permet d'introduire la notion de polynôme $p(b)$ par rapport à l'indéterminée b :

$$p(b) = a_0 + a_1 b + \dots + a_n b^n = \sum_{k=0}^{n} a_k b^k .$$

L'entier n est le degré du polynôme p.
Si on utilise ce polynôme pour représenter un nombre entier relativement à la base

b, on suppose que a_j est un nombre entier, avec $0 \leq a_j \leq b-1$.

En général, un polynome est une expression $p(x)$ de la forme

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k .$$

C'est un être mathématique qui n'est qu'une généralisation d'un nombre, si on choisit une représentation décimale par exemple.

- Remarquons enfin que le symbole d'égalité "=" est introduit par Robert Recorde (Oxford, 1510-1558).

2 Expressions de surfaces et de volumes.

- Rectangle de côtés a et b.

  Son périmètre P vaut $P = 2(a+b)$ et sa surface $S = ab$.

- Carré de côté a.

  C'est un rectangle qui a ses deux côtés égaux : $b=a$ dans les relations précédents. Alors

  $P = 4a$ et $S = a^2$.

- On peut se poser le problème d'exprimer la surface du carré en fonction du périmètre. On élimine alors a entre les deux relations précédentes. On tire par exemple $a = P/4$ de la première relation et on le reporte dans la seconde : $S = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$.

- Cercle et disque de rayon R.

On sait bien que le périmètre P du cercle est donné par $P = 2\pi R$ et la surface S du disque satisfait à $S = \pi R^2$. On laisse le lecteur en déduire une relation entre la surface et le périmètre.

Surtout, on remarque que le nombre π présent dans ces deux relations ($\pi \simeq 3,14159\ldots$) est bien le même nombre, ce qui n'est pas si évident !

- Parallélipipède rectangle.

Avec des côtés de longueurs a, b, c et des angles droits aux huit coins, la surface S est obtenue en sommant les surfaces des six rectangles qui composent le bord, et $S = 2(ab + bc + ca)$. Le volume a une expression plus simple : $V = abc$.

- Cube de côté a.

On impose $b = c = a$ dans les relations précédentes. Alors $S = 6a^2$ et $V = a^3$.

- Sphère et boule de rayon R.

Les expressions $S = 4\pi R^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

sont bien classiques, mais les preuves sont loin d'être évidentes ! On doit faire appel au calcul différentiel, qui sera introduit lors de la prochaine leçon.

③ Fonction puissance

- Si on veut exprimer le volume V du cube en fonction de sa surface, on doit résoudre l'équation
$$6a^2 = S$$
d'inconnue a, ce qui entraîne d'utiliser la racine carrée : $a = \sqrt{S/6}$.

- Le symbole $\sqrt{}$ s'applique à un nombre positif et représente toujours un nombre positif :
$$\left(y = \sqrt{x} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

- avec l'outil "racine carrée", on peut achever l'exercice "volume en fonction du périmètre" pour le cube :
$$V = a^3 = \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3 = \frac{(S^{1/2})^3}{(\sqrt{6})^3} = \frac{S^{3/2}}{6^{3/2}}.$$
Cette expression fait apparaître des exposants fractionnaires que nous introduisons petit à

petit dans ce qui suit.

- Si n est un entier $\geqslant 1$ et x un nombre quelconque, on pose

$$x^n = \underbrace{x.x.\,\ldots\,.x}_{n \text{ fois}}.$$

on remarque alors la relation exponentielle

$$x^{n+m} = x^n . x^m$$

valable a priori pour des entiers n et $m \geqslant 1$.

- afin de continuer à vérifier la belle relation exponentielle précédente, comme 0 vérifie $0+n=n$, on pose

$$x^0 = 1$$

- On suppose maintenant $x \geqslant 0$ et on se donne un entier $q \geqslant 1$. La racine q^e de x, notée $\sqrt[q]{x}$ ou (mieux!) $x^{1/q}$ est l'unique nombre positif tel que

$$\underbrace{x^{1/q}.x^{1/q}.\,\ldots\,.x^{1/q}}_{q \text{ fois}} = x$$

on a donc par construction $(x^{1/q})^q = x$.

- Si $r = \frac{p}{q}$ est le quotient de deux nombres entiers $\geqslant 1$, le nombre x^r est défini lorsque x est positif par la relation

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \underbrace{x^{\frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}} \cdot \dots \cdot x^{\frac{1}{q}}}_{p \text{ fois}}.$$

- On peut alors démontrer que pour deux rationnels positifs r et r', on a encore la relation exponentielle :

$$x^{r+r'} = x^r \cdot x^{r'}, \quad x \geqslant 0, \; r, r' \in \mathbb{Q}_+.$$

- On remarque également que $(x^q)^{1/q} = x$ si $x \geqslant 0$. Avec une puissance rationnelle, on voit apparaître (avec $a = \frac{1}{q}$ ou q, $b = q$ ou $\frac{1}{q}$) une seconde relation exponentielle :

$$(x^a)^b = x^{ab}, \quad x \geqslant 0, \; a \text{ et } b \text{ rationnels} \geqslant 0.$$

La relation $S^{3/2} = (\sqrt{S})^3$ est un exemple d'utilisation de cette relation générale [avec $a = 1/2$ et $b = 3$]

- Une puissance négative commence par savoir définir x^{-1}. On se propose de garder encore vraie la relation exponentielle $x^{n+m} = x^n x^m$ avec des nombres entiers n et m éventuellement négatifs. En particulier,

$$x^{-1} \cdot x^1 = x^{-1+1} = x^0 = 1$$

Comme $x^1 = x$, on en déduit que $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, l'inverse du nombre x. On peut alors étendre les deux relations exponentielles

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b \quad , x>0$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \quad , x>0$$

à tout couple (a,b) de nombres rationnels de signe quelconque, puis à tous les nombres réels, qui sont des nombres construits pour "bien compléter" les nombres rationnels. Par exemple, $\sqrt{2}$ ou π sont des nombres réels mais ce ne sont pas des nombres quotients de deux nombres entiers (ou rationnels).

④ Exponentielle et logarithme.

- On change de point de vue sur la fonction puissance. Au lieu de considérer que dans l'expression x^a (avec $x>0$ et $a \in \mathbb{R}$), c'est x qui varie et a le paramètre, on considère que c'est x le paramètre et a qui varie. On échange alors les rôles des lettres, afin de garder la lettre "x" pour la "variable". On fabrique donc l'expression a^x (avec $a>0$ et $x \in \mathbb{R}$), qui définit la fonction exponentielle (de base $a>0$) et d'argument $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction exponentielle également notée "exp" a été proposée par Euler (Bâle, 1707-1783) :

$$\exp(x) = e^{x}, x \in \mathbb{R}.$$

Elle utilise la base $e \simeq 2,718$ et satisfait bien entendu aux relations

$$e^{x+y} = e^{x} \cdot e^{y} \; ; \; (e^{x})^{y} = e^{xy}.$$

L'exponentielle remplace la somme par un produit.

- On peut se demander pourquoi cette exponentielle a un rôle si fondamental, alors que sa base e a une valeur bien compliquée [qui est d'ailleurs non rationnelle!]. Cette fonction est simple en fait, car sa dérivée en $x=0$ vaut simplement 1.

- Les valeurs prises par la fonction exponentielle sont toujours strictement positives :

$$e^{x} > 0 \quad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

De plus, quelque soit $y > 0$, il existe un unique nombre x réel de sorte que

$$\exp(x) = y.$$

Le nombre x s'appelle le logarithme du nombre strictement positif y ; on le note $x = \log y$:

$$e^x = y \iff x = \log y \quad , y > 0.$$

- La fonction qui à $y > 0$ associe le nombre $x \in \mathbb{R}$ défini ci-dessus est la fonction <u>réciproque</u> de la fonction exponentielle. On a en particulier

$$\exp(\log a) = a \quad \text{si } a > 0$$

$$\log(\exp(a)) = a \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}.$$

- Le logarithme transforme un produit en somme :

$$\log(ab) = \log a + \log b, \quad a > 0, b > 0.$$

De plus $\log(1) = 0$ et $\log(e) = 1$.

On en déduit $\log \frac{1}{a} = -\log a$ si $a > 0$

et pour $a > 0$ et $b > 0$: $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

Le logarithme est inventé par John Naper (Écosse, 1550-1617), avant l'exponentielle.

Enfin, le logarithme transforme une fonction puissance en produit :

$$\log(a^b) = b \log a, \quad a > 0, b > 0.$$

- Le logarithme décimal est proportionnel au logarithme naturel (ou de Naper); on pose

$$\log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10} \quad , x>0.$$

alors $\log_{10}(10) = 1$ et de façon générale,

$$\log_{10}(10^n) = n .$$

Ainsi $\log_{10}(2018)$ est un nombre compris entre $\log_{10}(1000) = 3$ et $\log_{10}(10\,000) = 4$.

(5) Complement ; valeur absolue.

La valeur absolue $|x|$ d'un nombre réel x n'est pas définie par une unique formule "analytique":

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

on a toujours $|x| \geq 0$.
on peut se convaincre que

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

- La valeur absolue d'un produit est égal au produit des valeurs absolues:

$$|xy| = |x|\,|y|$$

Mais la valeur absolue de la somme est simplement majorée par la somme des valeurs absolues ; c'est l'inégalité triangulaire :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| .$$

- Enfin, si $|x| = 0$, alors $x = 0$.

Dubois

Paris, 11 octobre 2018.

<u>Ouvrages consultés.</u>

- A. Bouvier, M. George, F. Le Lionnais. Dictionnaire des mathématiques, PUF, 1979.
- A. Dahan-Dalmedico, J. Peiffer. Une histoire des mathématiques, Points Seuil, 1986.
- A. Ducrocq, A. Warusfel. Les mathématiques, plaisir et nécessité, Points Seuil, Vuibert, 2000.
- R. Mankiewicz. Histoire des mathématiques, Seuil, 2000.
- R. Rashed. Al-Khwārizmī, le commencement de l'algèbre, Blanchard, 2007.

MAGPE ① Exercices

d'après Marie Debacq.

1) On se donne la relation

$$(\rho' - \rho) g h = \frac{1}{2} \rho u^2 \left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1 \right]$$

et on sait que $Q_v = \frac{\pi D^2}{4} u$.

Comment exprimer Q_v en fonction de ρ, ρ', g, h, D et d ?

2) On définit les nombres sans dimension

$$A_r = \frac{1}{\mu^2} d_p^3 g (\rho_p - \rho_f) \rho_f$$

et $Re_t = \frac{1}{\mu} \rho_f u_t d_p$.

En régime de Newton, on a $Re_t = \sqrt{3 A_r}$.

Comment exprimer u_t en fonction de d_p, g, ρ_p et ρ_f ?

3) On se donne les lois de Carman - Kozeny

$$\frac{\Delta P}{L} = h_K a_p^2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \mu u_S$$

et de Darcy : $Q_v = \frac{B}{\mu} \Omega \frac{\Delta P}{L}$,

avec la relation $u_S = \frac{Q_v}{\Omega}$.

Exprimer le coefficient B de la loi de Darcy en fonction des coefficients h_K, a_p et ε

de la loi de Carman-Kozeny.

4) on impose $t_c = \frac{H}{u_t}$ inférieur à $t_S = \frac{HL\ell}{Q_v}$.

Quelle inégalité est satisfaite par L ?

5) on se donne la loi de vitesse

$$u_t = \frac{d_p^2\, g\, (\rho_p - \rho_f)}{18\mu}$$

et on veut $t_c = \frac{H}{u_t}$ égal à $t_S = \frac{HL\ell}{Q_v}$.

Exprimer d_p en fonction de $\mu, Q_v, L, \ell, g, \rho_p, \rho_f$.

6) on suppose $N_1^3\, d_1^2 = N_2^3\, d_2^2$, avec

$d_1 = 9{,}2$ cm, $d_2 = 92$ cm et $N_1 = 300\ \mathrm{mn}^{-1}$.

Que vaut N_2 ?

10 octobre 2018.