Mathématiques Appliquées pour le Génie des Procédés et l'Energétique

Paris, automne 2018

Dérivation et tangente à une courbe

Notes du cours 02

Amélie Danlos, Marie Debacq, François Dubois

MAGPE ②

Dérivation et tangente à une courbe.

F. Dubois
17 octobre 2018.

① Fonction linéaire.

- Il s'agit d'exprimer une relation de proportionalité entre deux variables. Pour la loi d'Ohm en électricité, on la différence de potentiel V est proportionnelle à l'intensité I du courant :

$$V = R\, I.$$

La constante de proportionalité $R > 0$ est la résistance du circuit.

En mécanique des fluides, le débit Q est proportionnel à la vitesse u ; le coefficient de proportionalité est la surface $S > 0$ du tuyau:

$$Q = S \,.\, u.$$

- Le langage mathématique a l'habitude d'exprimer les relations précédentes sous la forme

$$y = a x,$$

où la constante de proportionalité a est un nombre réel fixé. On représente une telle relation

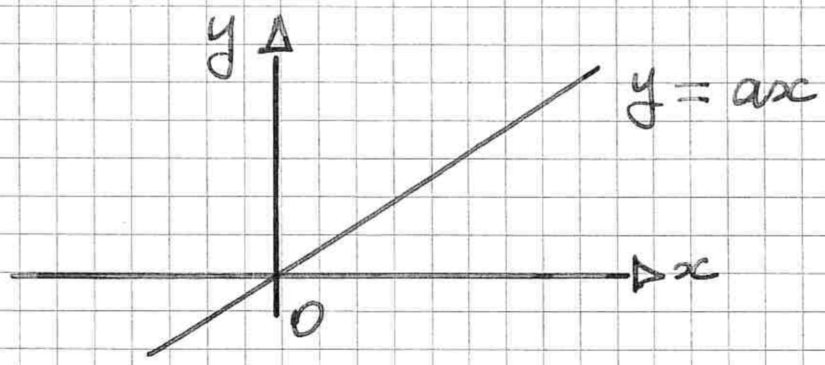


Figure 1 - Fonction linéaire.

linéaire en plaçant la variable x en abscisse et y en ordonnée (figure 1). Le coefficient a est alors la pente de la droite d'équation $y = ax$. On remarque que cette droite passe par l'origine.

- Si $a = 0$, $y = 0$ et la droite représentative est l'axe des abscisses. Remarquons au passage que l'axe des ordonnées a pour équation $x = 0$.
Si $a = +1$, la droite $y = x$ s'appelle la "première bissectrice" et si $a = -1$, la droite d'équation $y = -x$ est la "seconde bissectrice".

② Fonction affine

On se donne cette fois deux paramètres a et b et on définit une fonction f de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et à valeurs dans les réels à l'aide de la relation

$$f(x) = ax + b.$$

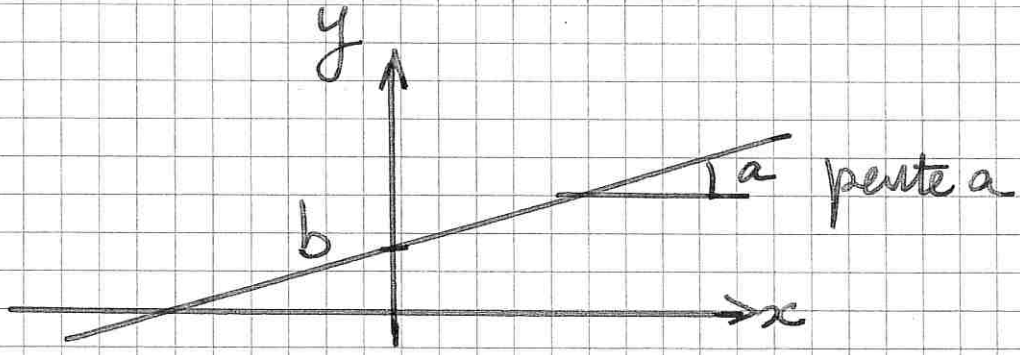


Figure 2 - Fonction affine : $y = ax + b$.

- Si $b = 0$, on retrouve une fonction linéaire comme étudiée au paragraphe précédent. On a aussi

$$b = f(0)$$

et le nombre b est appelé aussi "ordonnée à l'origine".

- De façon générale, on dit qu'une fonction f est strictement croissante si et seulement si $x < x'$ entraîne toujours $f(x) < f(x')$, ce quel que soit x et x' :

$$(x < x') \Rightarrow (f(x) < f(x')) .$$

- Pour une fonction affine f de la forme $f(x) = ax + b$, on a la propriété suivante : f strictement croissante si et seulement si $a > 0$.

□ On montre cette proposition en deux étapes. On suppose d'abord f strictement croissante. On a alors $0 < 1$ entraîne $f(0) = b < f(1) = a + b$. Donc $a > 0$.

Réciproquement si $a > 0$, montrons que f est strictement croissante. Pour cela, on se donne deux réels x et x' de sorte que $x < x'$. alors $ax < ax'$ puisque $a > 0$. En ajoutant b, $ax + b < ax' + b$, c'est à dire $f(x) < f(x')$. La propriété est donc établie. $\square$

- On a une définition analogue pour les fonctions strictement décroissantes :

$$(x < x') \Rightarrow (f(x) > f(x')).$$

Pour une fonction affine [$f(x) = ax + b$], on peut établir (preuve laissée au lecteur !) que f est strictement décroissante si et seulement si $a < 0$.

- Si $a = 0$, la fonction affine f (avec $f(x) = ax + b$) est constante : $\forall x$, $f(x) = b$.

③ Application d'un intervalle I dans un intervalle J.

Un intervalle I est un sous ensemble des réels $\mathbb{R}$ de la forme $]\alpha, \beta[$, $[\alpha, \beta[$, $[\alpha, \beta]$, etc, avec $\alpha < \beta$; éventuellement avec $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$. Par exemple, $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, $[0, +\infty[= \mathbb{R}_+$, $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$, etc.
Même notion pour l'intervalle $J =]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $[a, b]$ avec $a < b$.

- On dit qu'une fonction f est une <u>application</u> de l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle J si et seulement si pour tout réel x de l'intervalle I ($\forall x \in I$), il existe un et un seul nombre réel y de l'intervalle J ($\exists !\, y \in J$) de sorte que $y = f(x)$:

$$\forall x \in I,\ \exists !\, y \in J,\ y = f(x).$$

Une telle fonction est notée

$$f : I \to J.$$

On dit que I est l'intervalle de définition de f ; on peut "calculer" $f(x)$ pour $x \in I$, mais on ne peut rien dire si $x \notin I$ (x n'appartient pas à l'intervalle I).

- Les fonctions affines vues au paragraphe précédent sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: pour a et b fixés et x réel arbitraire, on peut toujours calculer $f(x) = ax + b$. Pour d'autres fonctions comme le logarithme, on a $I =]0, +\infty[$; ou la racine carrée, on a $I = [0, +\infty[$.

- On étudiera dans la suite l'application p définie de $I = [0,1]$ à valeurs dans $J = [1,2]$ telle que $p(x) = 1 + x^2$:

$$p : [0,1] \to [1,2] \ ; \ p(x) = 1 + x^2.$$

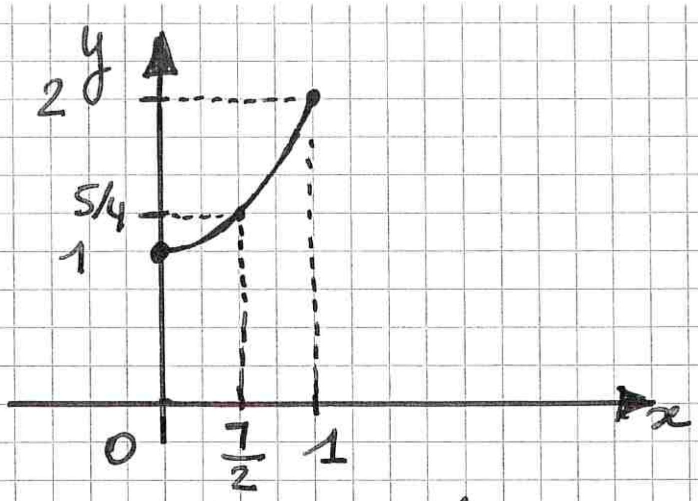


Figure 3. Graphe de la fonction $y = 1+x^2$ avec $0 \leq x \leq 1$.

La courbe représentative de cette fonction (Figure 3) n'est pas un segment de droite ; la fonction p, polynômiale de degré 2 n'est pas une fonction affine.

4) Approximation locale par une fonction affine.

- Afin de simplifier les calculs, on cherche souvent approcher une fonction "quelconque" f par une fonction affine g. Ceci au prix d'une hypothèse ; on fait un zoom autour d'une valeur donnée x_0, donc du point de coordonnées $(x_0, y_0 = f(x_0))$. Nous le mettons en évidence pour l'exemple de la fonction p de la figure 3 avec $x_0 = \frac{1}{2}$.

- On suppose que x est "voisin" de $\frac{1}{2}$, c'est à dire qu'on peut écrire

$$x = \frac{1}{2} + h,$$

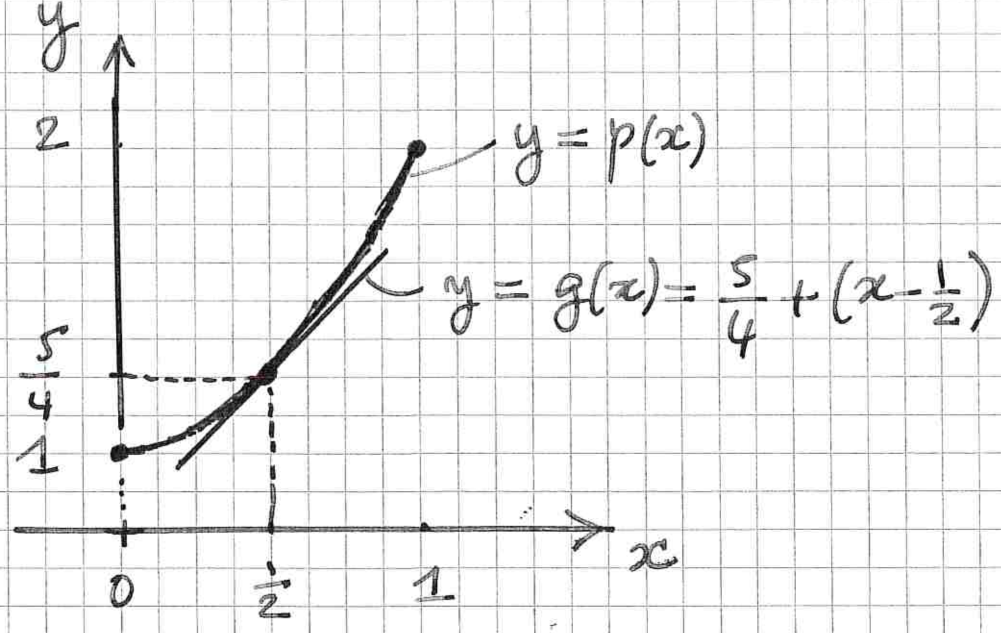


Figure 4. Approximation au voisinage de $x_0 = 1/2$ de la fonction p ($p(x) = 1 + x^2$) par la fonction affine g avec $g(x) = \frac{5}{4} + (x - \frac{1}{2})$.

avec h "assez petit" ($h = \frac{1}{100}$ pour fixer les idées).
On remarque que $p(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. De plus,

$$
\begin{aligned}
p(\tfrac{1}{2} + h) &= 1 + (\tfrac{1}{2} + h)^2 \\
&= 1 + (\tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot h + h^2) \\
&= \tfrac{5}{4} + h + h^2
\end{aligned}
$$

$$p(\tfrac{1}{2} + h) \simeq \frac{5}{4} + h$$

en négligeant le terme en h^2 (de l'ordre du dix-millième, $10^{-4} = 0,0001$). On note g la fonction au membre de droite de l'égalité précédente. Comme $h = x - \frac{1}{2}$, on a

$$g(x) = \frac{5}{4} + (x - \frac{1}{2})$$

ainsi qu'illustré figure 4.

- La fonction g est affine (le lecteur calculera a et b qui permettent d'écrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = ax + b$). Pour x voisin de $x_0 = \frac{1}{2}$, cette fonction affine est une "très bonne" approximation au sens suivant : pour h plus petit que 1/100, on se trompe sur la valeur de $p(\frac{1}{2}+h)$ en la remplaçant par $g(\frac{1}{2}+h)$ d'au plus $h^2 = 10^{-4}$. On remarque la pente de cette fonction affine ($a = 1$) apparaît comme égale à la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[p\left(\frac{1}{2}+h\right) - p\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 1 .$$

- En effet, on a le calcul (essentiellement déjà fait page 7 !) suivant :

$$\frac{1}{h}\left[p\left(\frac{1}{2}+h\right) - p\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{h}\left[1 + \left(\frac{1}{2}+h\right)^2 - \left(1+\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{4} + h + h^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{h}(h + h^2)$$

$$= 1 + h$$

qui tend vers 1 si h tend vers 0.

(5) Dérivée d'une fonction en un point.

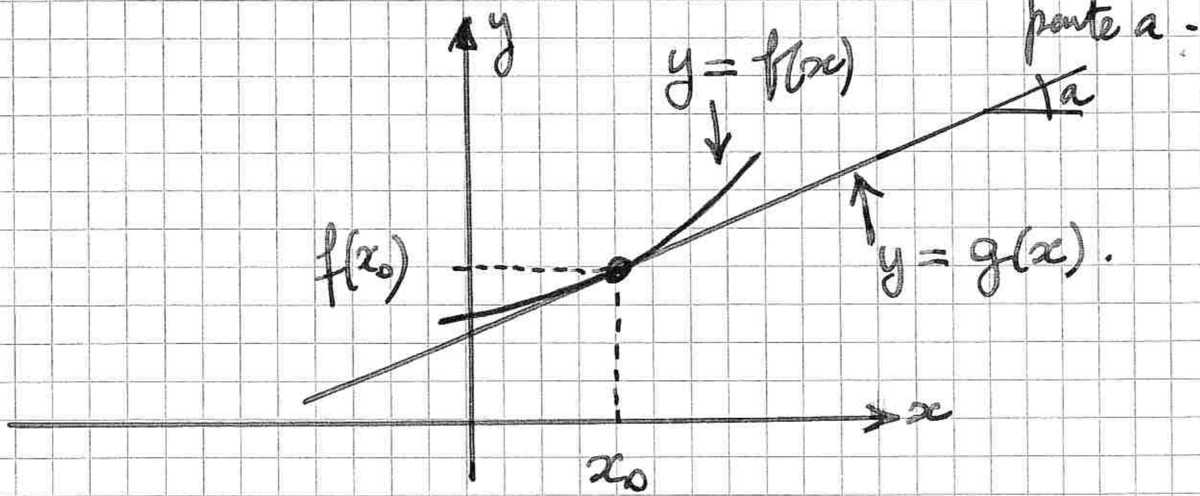
- On généralise ce qui a été fait pour la fonction p ($p(x) = 1 + x^2$) et le point $x_0 = \frac{1}{2}$ à une fonction f quelconque de I dans J et $x_0 \in I$ un point arbitraire de l'intervalle I. On fait l'hypothèse suivante : la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) \quad \text{existe dans } \mathbb{R}$$

On note alors (provisoirement $a \in \mathbb{R}$) cette limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right] = a .$$

- Si cette hypothèse est vérifiée, on dit que f est <u>dérivable au point x_0</u>. Alors on peut approcher f par une fonction affine au voisinage de x_0.



<u>Figure 5</u>. Droite tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$.

Si la limite pour h tendant vers zero de $\frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0))$ vaut a, on peut écrire

$$\frac{1}{h}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = a + \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 si h tend vers 0. On a alors en multipliant l'égalité précédente par h:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = a\,h + h\,\varepsilon(h),$$

c'est à dire

$$f(x_0+h) = \left(f(x_0) + ah\right) + h\,\varepsilon(h)$$

- Dans l'expression précédente, si on néglige le terme "$h\,\varepsilon(h)$", on remplace la fonction f par la fonction "$f(x_0)+ah$" qu'on peut définir comme fonction de la variable x, avec $x = x_0+h$. On a donc

$$g(x) = f(x_0) + a(x-x_0).$$

Cette fonction g est affine (de la forme "$ax+b$"; que vaut b ?). Elle "approche bien" f au voisinage de x_0 [on a d'ailleurs $g(x_0) = f(x_0)$]. La droite d'équation $y = g(x)$ s'appelle <u>droite tangente</u> à f en x_0 (Figure 5).

(6) Fonction dérivée

- La notation "a" du paragraphe précédent pour la limite du taux d'accroissement $\frac{1}{h}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)$ lorsque h tend vers 0 est provisoire. Avec Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727) on pose

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right] = f'(x_0),$$

Ce "nombre dérivé" est tantôt noté $\frac{df}{dx}(x_0)$ (choix de Leibniz), tantôt $f'(x_0)$ (choix de Newton). Nous utilisons indifféremment l'une ou l'autre des notations. On a aussi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

qui n'est qu'une réécriture de la relation précédente avec $x = x_0 + h$.

- Si on se donne $\alpha < \beta$ et l'intervalle ouvert $I =]\alpha, \beta[$, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est <u>dérivable sur l'intervalle I</u> si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$: le nombre dérivé $f'(x_0)$ existe pour tout $x_0 \in I$. On définit alors une nouvelle fonction, notée f' ou $\frac{df}{dx}$, qui, à tout $x \in I$, associe le nombre $f'(x)$; c'est la <u>fonction dérivée</u> de la fonction f sur l'intervalle I.

- Quelques exemples de fonctions dérivables.

* Si $p(x) = 1 + x^2$, $p'(x) = 2x$
* Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}$
* pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$.
* pour $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

Pour montrer cette propriété, nous utilisons l'hypothèse (qui définit presque la fonction exponentielle) que cette fonction est dérivable en $x_0 = 0$ et le nombre dérivé vaut 1 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Alors on a :

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \, \frac{e^h - 1}{h}$$

qui tend vers e^x si h tend vers 0. La fonction dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle-même !

7) Propriétés de la dérivation

- On se donne un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et deux fonctions dérivables f et g de I dans $\mathbb{R}$. Alors la dérivée de $(f+g)$ est la somme des dérivées de f et de g :

$$(f+g)' = f' + g' \; ; \; \frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} .$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre fixé et f dérivable de I dans $\mathbb{R}$, la dérivée de la fonction λf est égale à la dérivée de f multipliée par le nombre λ :

$$(\lambda f)' = \lambda \cdot f' \; ; \; \frac{d}{dx}(\lambda f) = \lambda \frac{df}{dx} \; , \; \lambda \in \mathbb{R} .$$

Les deux propriétés précédentes expriment la <u>linéarité</u> de l'opération de dérivation.

- Règle de Leibniz de la dérivée d'un produit. Si les deux fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, alors la fonction produit (définie par $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$) est une fonction dérivable sur I. La dérivée $(fg)' = \frac{d}{dx}(fg)$ est donnée par :

$$(fg)' = f'g + f g' = \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(fg) .$$

- Signe de la dérivée et monotonie.

On note toujours $I =]\alpha, \beta[$ (avec $\alpha < \beta$) un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur l'intervalle I. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I :

$$(\forall x \in I,\ f'(x) > 0) \Rightarrow (f \text{ strictement croissante}).$$

De même, si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I :

$$(\forall x \in I,\ f'(x) < 0) \Rightarrow (f \text{ strictement décroissante})$$

La fonction f a même monotonie que la fonction affine g qui l'approche bien au point x_0, à savoir

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

[Le lecteur pourra écrire cette fonction affine sous la forme $g(x) = ax + b$ en précisant les valeurs de a et b].

8 Dérivée d'une fonction composée.

- On se donne deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to K$ qui "relient" les trois intervalles I, J, et K. On peut alors considérer la fonction composée $g\circ f : I \to K$ (directement!) définie par

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)).$$

On peut écrire aussi $y = f(x)$, $z = g(y)$ et $z = g(f(x)) = (g\circ f)(x)$.

- Si les fonctions f et g sont dérivables, alors la composée $g\circ f$ est également dérivable et on a

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x), \quad x\in I.$$

La dérivée de la composée $g\circ f$ s'obtient en <u>multipliant</u> les dérivées de g et de f.

- Par exemple, $f(x) = \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ donné) et $g(y) = \exp(y)$. Alors $z = (g\circ f)(x) = \exp(\alpha x)$. On a

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}\right) = \alpha\, e^{\alpha x}$$

en appliquant la règle de dérivée d'une fonction composée. Cette règle s'utilise sans effort grâce à la notation de Leibniz en utilisant les "différentielles" dx et dy comme des fractions ordinaires! Ainsi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = g'(y)\cdot f'(x).$$

(9) Dérivée de la fonction réciproque.

- On se donne deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, I et J et f dérivable de I dans J. On suppose de plus f bijective : pour tout $y \in J$, il existe un et un seul $x \in I$ tel que $y = f(x)$:

$$\forall y \in J, \ \exists!\, x \in I, \quad y = f(x).$$

En d'autres termes, l'équation (en x) $f(x) = y$ a une et une seule solution (x) que l'on note également $f^{-1}(y)$:

$$\left(x = f^{-1}(y)\right) \Leftrightarrow \left(y = f(x)\right)$$

- Par exemple $I = \mathbb{R}$, $J =]0, +\infty[$ et $f(x)$ la fonction exponentielle : $\forall y \in \mathbb{R}$, l'équation $e^x = y$ a une et une seule solution $x = \log(y)$.

- Avec les hypothèses précédentes (f bijective $I \to J$ et dérivable), la <u>fonction réciproque</u> $f^{-1} : J \to I$ est également dérivable et on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \quad y \in J.$$

avec la notation de Leibniz, on écrit simplement

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x)} \ , \ y \in J \ , \ y = f(x) \ ; \ x = f^{-1}(y),$$

en utilisant pour les différentielles dx et dy les règles de calcul usuelles des fractions.

- Avec l'exemple précédent $y = e^x$, on a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\log y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{d}{dx}(e^x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

ce qui permet d'établir la valeur de la dérivée de la fonction logarithme :

$$\frac{d}{dy}(\log y) = \frac{1}{y} \ , \ y > 0 .$$

Paris, 18 octobre 2018

Dubois.

MAGPE ② Exercices.

1) on se donne un paramètre $d > 0$ et on pose

$$f(D) = \left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1. \quad \text{Que vaut } f'(D) \text{ ?}$$

2) on se donne un paramètre $D > 0$ et on pose

$$g(d) = \left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1. \quad \text{Que vaut } g'(d) \text{ ?}$$

3) Pour $\xi > 0$, on pose $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} - (a \log \xi + b)$, où a et b sont des constantes fixées.
Que vaut $f'(\xi)$?

4) On se donne une fonction dérivable $x \mapsto u(x)$ jamais nulle ($\forall x,\ u(x) \neq 0$). Que vaut

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u(x)}\right) \text{ ?}$$

5) On pose $f(x) = 1 + x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
a) Quelle est l'équation de la tangente à f au point x_0 pour les trois valeurs suivantes de x_0 ?
$x_0 = 0, \frac{1}{2}, 1$.
b) Représenter graphiquement ces trois droites et achever le dessin de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$.

6) Essentiellement le même exercice que le 5), avec $f(x) = e^x$ et $x_0 = -1, 0, 1$.
On tracera la courbe $y = \exp(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$.

7) On rappelle que $\log_{10} x = \dfrac{\log x}{\log 10}$.
Que vaut la dérivée de cette fonction ?

8) On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$.
a) Exprimer f à l'aide de la fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$.
b) Calculer $f'(x)$.

9) Pour $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue $|\cdot|$ est définie par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$.
a) Montrer que cette fonction est dérivable en tout point $x_0 \neq 0$.
b) Calculer sa dérivée, en distinguant les cas $x > 0$ et $x < 0$.
c) Montrer que cette fonction n'est <u>pas</u> dérivable au point $x_0 = 0$; on reviendra à la définition du nombre dérivé en un point d'une fonction réelle de variable réelle.

18 oct 2018

J.