le cnam

Mathématiques Appliquées pour le Génie des Procédés et l'Energétique

Paris, automne 2018

Une équation différentielle non linéaire

Notes du cours 09

Amélie Danlos, Marie Debacq, François Dubois

MA.GPE (9)

Une équation différentielle non linéaire.

12 décembre 2018.

(1) Modèle physique.

L'équation de la filtration, utile entre autres en génie des Procédés, peut s'écrire

$$\Delta P = \left(R_S + \frac{\alpha . w}{\Omega} V \right) \frac{\mu}{\Omega} \frac{dV}{dt}.$$

Dans cette relation, ΔP et V varient en fonction du temps alors que R_S, α, w, Ω et μ sont des constantes.

On pose également (pour fixer les idées)

$$V(0) = 0.$$

- On commence par faire apparaître une grandeur $\bar{V}$ homogène au volume V :

$$\bar{V} = R_S \frac{\Omega}{\alpha . w}.$$

alors le modèle différentiel peut se réécrire

$$(V + \bar{V}) \frac{dV}{dt} = \frac{\Omega^2}{\alpha . w \mu} \Delta P.$$

Le terme de gauche de cette relation est homogène au carré de V divisé par le temps ; donc il en est de même du terme de droite. On définit un temps de référence $\overline{\overline{T}}$ en posant

$$\frac{\overline{\overline{V}}^2}{\overline{\overline{T}}} = \frac{\Omega^2}{\alpha w \mu} \, \Delta P(0) \, .$$

Alors l'équation de la filtration s'écrit

$$(V + \overline{\overline{V}}) \frac{dV}{dt} = \frac{\overline{\overline{V}}^2}{\overline{\overline{T}}} \, \frac{\Delta P(t)}{\Delta P(0)} \, .$$

- Pour cette leçon, on introduit un <u>modèle simplifié</u> en posant

$$\Delta P(t) \equiv \Delta P(0) \, .$$

On peut alors facilement introduire un "volume sans dimension" $u \equiv V / \overline{\overline{V}}$ et un "temps sans dimension" $\theta \equiv t / \overline{\overline{T}}$. Alors

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\overline{\overline{T}}}{\overline{\overline{V}}} \, \frac{dV}{dt}$$

et l'équation de la filtration simplifiée s'écrit

$$\left(1 + \frac{V}{\overline{\overline{V}}}\right) \frac{\overline{\overline{T}}}{\overline{\overline{V}}} \frac{dV}{dt} = 1 \, ,$$

c'est à dire
$$(1+u) \, \frac{du}{d\theta} = 1 \, .$$

- Dans la suite, nous nous intéressons à la fonction $u(\theta)$ solution de

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{1+u(\theta)} \, , \quad \theta > 0 \qquad \text{avec } u(0) = 0 \, .$$

(2) Schéma d'Euler explicite

On cherche à estimer au mieux $u(\theta_{max})$ avec

$$\theta_{max} = 8.$$

On divise l'intervalle $[0, \theta_{max}]$ en N morceaux égaux, ce qui permet de définir un pas de temps $\Delta t > 0$:

$$\Delta t = \frac{\theta_{max}}{N}.$$

- Le schéma d'Euler explicite considère la valeur initiale

$$u^0 = 0$$

et les itérations (avec k entier ≥ 0) :

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{1+u^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

A l'issue de la conception et la réalisation d'un programme python, on trouve pour $u(\theta_{max})$ les valeurs approchées suivantes :

N	u(8)	N	u(8)
8	3,3394	256	3,128
16	3,2183	512	3,1258
32	3,1681	1024	3,1244
64	3,1450	2048	3,1238
128	3,128	4096	3,1234

Table 1. Résultats "Euler explicite"

Au vu de l'ensemble de ces résultats, les valeurs approchées semble converger vers une valeur limite $u(\theta_{max})$ qui vérifie

$$|u(\theta_{max}) - 3,122| \leqslant 0,001 .$$

En d'autres termes, $u(\theta_{max}) = 3,122$, avec une erreur sur le dernier chiffre qui pourrait être un 1 ou un 3.

③ Schéma d'Euler implicite

Avec le même modèle continu,

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{1+u(\theta)}, \quad \theta>0 \quad ; u(0)=0 ,$$

le schéma d'Euler implicite recherche

$$u^k \simeq u(k\Delta t)$$

de sorte de satisfaire à la relation

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{1+u^{k+1}} .$$

Cette relation est une équation du second degré. Si on note X au lieu de u^{k+1} l'inconnue, cette équation peut s'écrire

$$X^2 + (1-u^k)\,X - (u^k+\Delta t) = 0 .$$

Le discriminant Δ de cette relation permet le calcul suivant

$$\Delta = (1-u^k)^2 + 4(u^k + \Delta t)$$
$$= (1+u^k)^2 + 4\Delta t$$
$$= (1+u^k)^2 \left[1 + \frac{4\Delta t}{(1+u^k)^2} \right] \geqslant 0$$

L'équation du second degré a donc deux solutions :

$$X_{\pm} = \frac{1}{2}\left[u^k - 1 \pm (u^k+1)\sqrt{1 + \frac{4\Delta t}{(1+u^k)^2}} \right]$$

- afin de choisir la valeur qui définit effectivement le schéma d'Euler implicite, on remarque qu'on doit avoir

$$u^{k+1} - u^k \to 0 \text{ si } \Delta t \to 0.$$

or $X_- \to 0 - 1$ si $\Delta t \to 0$ alors que $X_+ \to u^k$ dans les mêmes conditions. On en déduit

$$u^{k+1} = \frac{1}{2}\left[u^k - 1 + (u^k+1)\sqrt{1 + \frac{4\Delta t}{(1+u^k)^2}} \right]$$

- On utilise ensuite ce schéma d'Euler implicite pour approcher $u(\theta_{max})$. On a les résultats suivants :

N	$u(\theta_{max})$	N	$u(\theta_{max})$
8	2,973	256	3,1177
16	3,043	512	3,120
32	3,081	1024	3,1217
64	3,102	2048	3,1224
128	3,112	4096	3,12277

Table 2 Résultats "Euler implicite"

Il semble alors raisonnable de conclure des expériences précédentes

$$|u(\theta_{max}) - 3,1226| \leq 0,0002$$

④ Schéma de Crank-Nicolson.

Le second membre du schéma de Crank-Nicolson est une moyenne entre les schémas d'Euler explicite et d'Euler implicite :

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{1}{1+u^k} + \frac{1}{1+u^{k+1}}\right).$$

L'inconnue $X = u^{k+1}$ satisfait donc à l'équation

$$X - \frac{\Delta t}{2(1+X)} = u^k + \frac{\Delta t}{2}\,\frac{1}{1+u^k}$$

Afin d'alléger les notations, on pose

$$v = u^k + \frac{\Delta t}{2(1+u^k)}$$

qui est en quelque sorte un prédicteur du schéma. Après multiplication par $1+X$, l'équation s'écrit :

$$X(1+X) - \frac{\Delta t}{2} = v(1+X)$$

c'est à dire

$$X^2 + (1-v)X - \left(v + \frac{\Delta t}{2}\right) = 0 .$$

On calcule le discriminant de la même façon que pour le schéma d'Euler implicite :

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-v)^2 + 4\left(v + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ &= 1 - 2v + v^2 + 4v + 2\Delta t \\ &= (1+v)^2 + 2\Delta t \\ &= (1+v)^2\left[1 + \frac{2\Delta t}{(1+v)^2}\right] \geqslant 0 . \end{aligned}$$

- D'où les deux solutions de l'équation du second degré :

$$X = \frac{1}{2}\left[v - 1 \pm (v+1)\sqrt{1 + \frac{2\Delta t}{(1+v)^2}}\;\right]$$

Si Δt tend vers 0, u^{k+1} tend vers u^k. Or d'une part v tend vers u^k. Et d'autre part X_- tend vers -1 alors que X_+ tend vers v. On en déduit que l'on doit conserver la solution avec le signe "+" pour définir

Le schéma de Crank-Nicolson :

$$\begin{cases} v = u^k + \dfrac{\Delta t}{2(1+u^k)} \\ u^{k+1} = \dfrac{1}{2}\left[v-1+(v+1)\sqrt{1+\dfrac{2\Delta t}{(1+v)^2}}\,\right]. \end{cases}$$

- L'expérimentation numérique conduit aux résultats suivants

N	$u(\theta_{max})$	N	$u(\theta_{max})$
8	3,1515	256	3,12333
16	3,1302	512	3,123112
32	3,12488	1024	3,123107
64	3,12355	2048	3,1231060
128	3,12322	4096	3,1231057

Table 3 Résultats "Crank-Nicolson".

Cette fois, le nombre de chiffres stabilisés lors des divers raffinements de maillage atteint six ! On peut raisonnablement déduire des expériences précédentes :

$$\left| u(\theta_{max}) - 3,123106 \right| \leq 0,000001$$

ce qui est beaucoup plus satisfaisant que pour les schémas précédents.

⑤ Schéma de Heun.

On a vu lors de la leçon précédente que le schéma de Heun peut être mis en œuvre à l'aide de deux étapes du schéma d'Euler explicite suivies d'une moyenne :

$$\tilde{u} = u^k + \frac{\Delta t}{1+u^k}$$

$$\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u} + \frac{\Delta t}{1+\tilde{u}}$$

$$u^{k+1} = \frac{1}{2}\left(u^k + \tilde{\tilde{u}}\right).$$

Les expériences numériques conduisent aux résultats ci-dessous

N	$u(\theta_{max})$	N	$u(\theta_{max})$
8	3,131	256	3,1231058
16	3,1242	512	3,12310565
32	3,1232	1024	3,123105629
64	3,12312	2048	3,123105626
128	3,123107	4096	3,1231056256

Table 4. Résultats "Heun".

On en déduit une estimation très précise :

$$|u(\theta_{max}) - 3{,}123105625| \leqslant 10^{-9},$$

soit 9 chiffres significatifs et une erreur de 1 sur le dernier chiffre. Ce résultat est extraordinairement précis. Dans presque tous les cas, les schémas de Heun et de Crank-Nicolson ont le même ordre de précision. Ce cas très particulier est appelé "super convergence". Nous l'étudions de façon spécifique à la fin de ce document.

(6) Solution analytique.

Le problème posé

$$\begin{cases} (1+u)\,\dfrac{du}{dt} = 1 \quad , \; t>0 \\ u(0) = 0 \,. \end{cases}$$

peut être résolu grâce à une "formule analytique". On remarque que l'équation dynamique peut s'écrire aussi

$$\frac{d}{dt}\left(u + \frac{u^2}{2} - t\right) = 0 \,,$$

ce qui implique que $u - \frac{u^2}{2} - t$ est une constante au cours du temps. Or à $t=0$, $u(0)=0$ et $t=0$. On en déduit que cette constante est nul.

le : $$u + \frac{u^2}{2} - t = 0 .$$

La solution $u(t)$ du problème continu en temps, du système dynamique, satisfait à l'équation du second degré

$$u^2 + 2u - 2t = 0 .$$

on en déduit :

$$(u+1)^2 = 1+2t$$

d'où

$$u = -1 \pm \sqrt{1+2t} \, , \quad t \geqslant 0 .$$

- Ici encore, il faut choisir le bon signe, la bonne racine de l'équation du second degré. La condition $u(0)=0$ exclut la solution avec le signe "$-$" ; on a finalement

$$u(t) = -1 + \sqrt{1+2t} \, , \; t \geqslant 0 .$$

on a bien une fonction régulière (car l'argument de la racine carrée $1+2t$ est strictement positif). Pour $t=0$, $u(0)=0$. Et l'équation différentielle est bien satisfaite :

$$(1+u) \frac{du}{dt} = \sqrt{1+2t} \; \frac{2}{2\sqrt{1+2t}} = 1 .$$

- A $t = 8$, $u(\theta_{max}) = \sqrt{17} - 1 = 3{,}1231056256176 6\ldots$

On peut donc faire la synthèse de l'étude numérique effectuée avec les quatre schémas. Rappelons que nous avons déduit des diverses simulations les résultats suivants

Euler explicite	$u(\theta_{max}) = 3,122 \pm 1$
Euler implicite	$u(\theta_{max}) = 3,1226 \pm 2$
Crank-Nicolson	$u(\theta_{max}) = 3,123106 \pm 1$
Heun	$u(\theta_{max}) = 3,123105625 \pm 1$
solution analytique	$u(\theta_{max}) = 3,1231056251766 \pm 1$

La notation ± 1 ou ± 2 à la fin des nombres signifie qu'on garde une incertitude de 1 ou 2 sur le dernier chiffre.

- Toutes les prédictions faites sont corrects, à l'exception du schéma d'Euler implicite où le dernier chiffre proposé s'avère inexact. Nous retenons de cet incident que la décision de faire le tri entre les décimales "utiles" et les décimales "inutiles" d'un résultat numérique appartient au seul opérateur humain. C'est pourquoi, on parle parfois d'"art du calcul numérique" !

⑦ Bonus ; analyse de l'erreur.

On ne propose pas ici une approche générale pour analyser l'erreur entre la solution exacte du système

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{1+u(t)}, & t>0 \\ u(0)=0 \end{cases}$$

et l'approximation $u^k \simeq u(k\Delta t)$ proposé par la simulation numérique.

- Compte tenu du fait qu'on dispose de la solution exacte du problème précédent

$$u(t) = -1+\sqrt{1+2\ t}\ ,\ t\geq 0$$

on peut développer l'expression précédente pour $t=\Delta t$ très petit. Rappelons d'abord que pour $\alpha\in\mathbb{R}$ et t tendant vers zéro, on a le développement de Taylor

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t^3+O(t^4).$$

avec $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1+t} = 1+\frac{t}{2}-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+O(t^4).$$

On en déduit

$$\sqrt{1+2t} = 1+t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3+O(t^4).$$

Donc

$$u(\Delta t) = \Delta t - \frac{1}{2}(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}(\Delta t)^3 + O(\Delta t^4).$$

- Pour le schéma d'Euler explicite, on a simplement pour le premier pas de temps

$$u_E(\Delta t) = 0 + \frac{\Delta t}{1+0} = \Delta t.$$

on fait donc une erreur $|u_E(\Delta t) - u(\Delta t)|$ de l'ordre de Δt^2 ; on dit pour cette raison que le schéma est d'ordre 1.

- Pour le schéma d'Euler implicite, on a dans ce cas particulier (voir la page 5)

$$u_I(\Delta t) = \frac{1}{2}\left[0 - 1 + (0+1)\sqrt{1 + \frac{4\Delta t}{(1+0)^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4\Delta t} - 1\right)$$

Donc

$$u_I(\Delta t) = \Delta t - 2\Delta t^2 + 2\Delta t^3 + O(\Delta t^4).$$

On a encore une erreur $|u_I(\Delta t) - u(\Delta t)| \simeq O(\Delta t^2)$ et le schéma est d'ordre 1.

- Pour le schéma de Crank-Nicolson, on a d'abord

$$v = 0 + \frac{\Delta t}{2(1+0)} = \frac{\Delta t}{2}.$$

Puis

$$u_{CN}(\Delta t) = \frac{1}{2}\left(v - 1 + (v+1)\sqrt{1 + \frac{2\Delta t}{(1+v)^2}}\right)$$

$$\frac{1}{(1+v)^2} = (1+v)^{-2}$$
$$= 1 - 2v + \frac{(-2)(-2-1)}{2} v^2 + O(v^3)$$
$$= 1 - 2v + 3v^2 + O(v^3)$$
$$= 1 - \Delta t + \frac{3}{4} \Delta t^2 + O(\Delta t^3).$$

$$\frac{2\Delta t}{(1+v)^2} = 2\Delta t - 2\Delta t^2 + \frac{3}{2} \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\sqrt{1 + \frac{2\Delta t}{(1+v)^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left[2\Delta t - 2\Delta t^2 + \frac{3}{2}\Delta t^3\right]$$
$$-\frac{1}{8}(2\Delta t - 2\Delta t^2)^2 + \frac{1}{16}(2\Delta t)^3 + O(\Delta t^4)$$
$$= 1 + \Delta t - \frac{3}{2}\Delta t^2 + \frac{9}{4}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$(v+1)\sqrt{1 + 2\Delta t/(1+v)^2} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right)\left(1 + \Delta t - \frac{3}{2}\Delta t^2 + \frac{9}{4}\Delta t^3\right) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{3}{2}\Delta t - \Delta t^2 + \frac{3}{2}\Delta t^3 + O(\Delta t^4).$$

Donc

$$u_{CN}(\Delta t) = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{\Delta t}{2} + \left(1 + \frac{3}{2}\Delta t - \Delta t^2 + \frac{3}{2}\Delta t^3\right)\right] + O(\Delta t^4)$$

$$u_{CN}(\Delta t) = \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{3}{4}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

- Compte tenu de l'expression de $u(\Delta t)$ page 15,

$$u_{CN}(\Delta t) - u(\Delta t) = \frac{1}{4}\Delta t^3 + O(\Delta t^4).$$

Le schéma de Crank-Nicolson approche la solution exacte au second ordre de précision. On peut démontrer que cette propriété est générale.

- Le schéma de Heun demande moins de calcul. Compte tenu des relations page 9, on a pour le premier pas de temps

$$\tilde{u} = 0 + \frac{\Delta t}{1+0} = \Delta t$$

$$\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u} + \frac{\Delta t}{1+\tilde{u}} = \Delta t + \frac{\Delta t}{1+\Delta t}$$

$$= \Delta t + \Delta t\left(1 - \Delta t + \Delta t^2 - \Delta t^3 + \dots\right)$$

$$= 2\Delta t - \Delta t^2 + \Delta t^3 + O(\Delta t^4).$$

Donc

$$u_H(\Delta t) = \frac{1}{2}\left(0 + \tilde{\tilde{u}}\right) = \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{2} + O(\Delta t^4).$$

- Nous en déduisons

$$u_H(\Delta t) - u(\Delta t) = O(\Delta t^4).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que le coefficient de Δt^4 est non nul dans le développement de $u_H(\Delta t) - u(\Delta t)$. L'approximation de $u(\Delta t)$ par $u_H(\Delta t)$ est exacte jusqu'aux termes d'ordre 3 inclus. C'est une situation exceptionnelle. En général,

$$|u_H(\Delta t) - u(\Delta t)| = \alpha\, \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

avec $\alpha \neq 0$; le schéma est d'ordre deux. Cette analyse formelle complète harmonieusement l'expérimentation numérique !

Dubois. 13 dec 2018.