le cnam

Mathématiques Appliquées pour le Génie des Procédés et l'Energétique

Paris, automne 2018

Equations différentielles non linéaires

Notes du cours 10

Amélie Danlos, Marie Debacq, François Dubois

Equations différentielles non linéaires

19 décembre 2018.

• Mesure des ordres de convergence.

Dans la leçon 9, nous avons approché le système dynamique

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{1+u(t)}, t>0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

entre les instants $t=0$ et $t=T=8$ par quatre schémas numériques : Euler explicite, Euler implicite, Crank-Nicolson et Heun.

À l'aide d'une simulation qui demande n pas de temps, ce qui correspond à un pas de temps Δt tel que

$$\Delta t = \frac{T}{n},$$

nous disposons de valeurs approchées $u_n^e(T)$, $u_n^i(T)$, $u_n^c(T)$ et $u_n^h(T)$ respectivement.

Comme la solution du système dynamique est connue, nous pouvons comparer les valeurs approchés à la valeur exacte $u(T)$. Nous mesurons donc des erreurs $\varepsilon_n(T)$ pour chacun des quatre schémas. Ces erreurs sont dues essentiellement à la méthode d'approximation, et très peu aux erreurs d'arrondis de l'ordinateur lors des calculs arithmétiques.

On peut montrer qu'asymptotiquement, pour n tendant vers $+\infty$, ces erreurs $\varepsilon_n(T)$ tendent vers 0 comme $1/n^\alpha$:

$$\varepsilon_n(T) = \frac{C}{n^\alpha}, \quad n \to \infty$$

où $\alpha > 0$ est l'<u>ordre</u> de la méthode. Nous ne rentrerons pas ici dans l'analyse numérique qu'il convient de mettre en place pour démontrer la relation asymptotique ci-dessus. Nous proposons une approche expérimentale (une expérience numérique avec un ordinateur) où on détermine une bonne approximation de α, qui est en général un nombre entier.

Nous considérons les dix valeurs suivantes de n, en progression géométrique de raison égale à 2 :

$$n \in N = \{8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096\}$$

Pour chaque schéma, nous mesurons $\mathcal{E}_n(T)$. Si la relation asymptotique est satisfaite, nous devons avoir

$$\log \mathcal{E}_n(T) = -\alpha \log n + \log C ,$$

c'est à dire une relation linéaire (affine, pour être tout à fait précis!) entre $\log n$ et $\log \mathcal{E}_n(T)$.

Nous cherchons, à partir des dix points

$$(\log n, \log \mathcal{E}_n(T))_{n \in N}$$

la droite des moindres carrés qui relie "au mieux" $\log \mathcal{E}_n(T)$ à $\log n$.

A l'issue de cette expérimentation (qui demande de d'effectuer un total de 40 simulations), l'approche des moindres carrés (le module "polyfit" de la librairie "Numpy" du langage "python") nous propose

$$\begin{cases} \alpha^e = 1,0269 \\ \alpha^i = 0,9824 \\ \alpha^c = 1,9997 \\ \alpha^h = 3,0250 . \end{cases}$$

Compte tenu de la connaissance a priori que les ordres de convergence sont des nombres entiers, nous en déduisons que les schémas d'Euler explicite et implicite sont d'ordre 1, que le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre 2 et, au moins dans ce cas particulier, que le schéma de Heun est d'ordre 3.

Comme nous l'avons remarqué lors de la leçon précédente, le schéma de Heun fait apparaître dans notre cas particulier une "super-convergence". En général, le schéma de Heun est d'ordre deux.

- Explosion en temps infini.

Nous terminons ces leçons par un cas de figure linéaire qui impose d'avoir un regard prudent sur toutes ces méthodes numériques.

Nous cherchons à approcher la fonction $u(t)$ solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\varepsilon}\, u(t),\ t>0 \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

où $\varepsilon>0$ est donné et $u_0 \in \mathbb{R}$ est fixé également. On sait (exercice !) que la solu.

tion de ce système peut s'écrire :

$$u(t) = u_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad t \geq 0.$$

Si $u_0 > 0$, $u(t)$ tend vers $+\infty$ si t tend vers $+\infty$, d'où le contexte d'une "explosion en temps infini".

On demande à une méthode raisonnable de satisfaire à une propriété analogue :

$$\text{si } u^k > 0, \text{ alors } u^{k+1} \geq 0.$$

- Le schéma d'Euler explicite s'écrit dans le cas du système précédent :

$$u^{k+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau}\right) u^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Si $\tau > 0$ et $\Delta t > 0$, $u^{k+1} > 0$ dès que $u^k > 0$; aucune condition n'est demandée à $\Delta t > 0$ pour le schéma d'Euler explicite pour une explosion en temps infini.

- Le schéma d'Euler implicite prend maintenant la forme

$$u^{k+1} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta t}{\tau}} u^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La propriété de monotonie $(u^k > 0 \Rightarrow u^{k+1} > 0)$ n'est réalisée que si

$$1-\frac{\Delta t}{\tau}>0$$

c'est à dire $\Delta t<\tau$. Pour une explosion en temps infini, le pas de temps $\Delta t>0$ du schéma d'Euler implicite est limité par la constante de temps du phénomène étudié.

- Le schéma de Crank-Nicolson s'écrit :

$$\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}u^k+\frac{1}{\tau}u^{k+1}\right)$$

on résout cette équation d'inconnue u^{k+1} :

$$u^{k+1}=\frac{1+\frac{\Delta t}{2\tau}}{1-\frac{\Delta t}{2\tau}}\,u^k\ ,\ k\in\mathbb{N}.$$

Avec $\tau>0$ et $\Delta t>0$, la condition $(u^k>0\Rightarrow u^{k+1}>0)$ n'est réalisée que si

$$1-\frac{\Delta t}{2\tau}>0$$

c'est à dire $\Delta t<2\tau$. Ici encore, un système explosif limite le pas de temps du schéma implicite

- Enfin, le schéma de Heun consiste à effectuer deux étapes du schéma d'Euler explicite et à prendre une moyenne

$$\begin{cases}\tilde{u}=u^k+\Delta t\,\dfrac{u^k}{\tau}\ ; & \tilde{\tilde{u}}=\tilde{u}+\dfrac{\Delta t}{\tau}\tilde{u}\\ u^{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(u^k+\tilde{\tilde{u}}\right).\end{cases}$$

On en déduit

$$u^{k+1} = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\right)^2\right] u^k \, , \, k \in \mathbb{N}.$$

Sans condition particulière sur le pas de temps, le schéma de Heun satisfait à la condition de monotonie.

o En conclusion, on se gardera toujours de considérer la résolution numérique approchée d'un système dynamique comme une "boîte noire" fiable à 100 %. La simulation numérique est un art de l'ingénieur. Les logiciels et les matériels informatiques ne sont que des outils au service de cet art.

Paris, 20 décembre 2018

Dubois.

le cnam

Conservatoire National des Arts et Métiers

Mathématiques Appliquéees pour le Génie des Procédés et l'Énergétique Devoir numéro 2, à rendre au plus tard jeudi 31 janvier 2018

On se propose d'étudier la convergence de schémas numériques fondamentaux pour l'étude du système dynamique composé de l'équation d'évolution

(1) $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1-t}{1+u(t)}\,,\ t > 0$$

avec la condition initiale

(2) $$u(0) = 0\,.$$

1) Etude du problème continu

a) Montrer que si une fonction $u(t)$ vérifie la relation (1) et est toujours différente de -1 ($u(t) \neq -1$ pour tout temps $t \geq 0$), alors on a la relation

(3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[u(t) + \frac{1}{2}\big(u(t)\big)^2 - t + \frac{t^2}{2}\Big] = 0\,.$$

b) Déduire des relations (2) et (3) que la fonction u est solution de l'équation

(4) $$u^2 + 2\,u - 2\,t + t^2 = 0\,.$$

c) Déduire des relations (2) et (4) que l'on a

(5) $$u(t) = -1 + \sqrt{1 + 2\,t - t^2}\,, \quad 0 \leq t \leq 1 + \sqrt{2}\,.$$

2) Expressions algébriques de quatre schémas numériques

Afin de simuler le système dynamique (1)(2) entre les instants 0 et $T = 1.2$, on se donne également un nombre entier n de pas de temps et une valeur du pas de temps $\Delta t = \frac{T}{n}$.

a) Montrer que pour $0 \leq k \leq (n-1)$, le schéma d'Euler explicite peut s'écrire entre les instants $k\,\Delta t$ et $(k+1)\,\Delta t$:

(6) $$u^{k+1} = u^k + \Delta t\,\frac{1 - k\,\Delta t}{1 + u^k}\,.$$

b) Montrer qu'entre les mêmes instants, le schéma d'Euler implicite prend la forme :

(7) $$u^{k+1} = \frac{1}{2}\left(u^k - 1 + (u^k+1)\sqrt{1 + \frac{4\,\Delta t\,(1-(k+1)\,\Delta t)}{(u^k+1)^2}}\right).$$

c) Montrer qu'entre les instants $k\,\Delta t$ et $(k+1)\,\Delta t$, le schéma de Crank-Nicolson s'écrit :

(8) $$\widetilde{u} = u^k + \Delta t\,\frac{1 - k\,\Delta t}{2\,(1+u^k)}\,,\ u^{k+1} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{u} - 1 + (\widetilde{u}+1)\sqrt{1 + \frac{2\,\Delta t\,(1-(k+1)\,\Delta t)}{(1+\widetilde{u})^2}}\right).$$

d) Enfin, montrer que les expressions algébriques suivantes permettent de mettre en œuvre le schéma de Heun :

$$(9) \qquad \widetilde{u} = u^k + \Delta t \, \frac{1 - k\,\Delta t}{(1+u^k)} \,, \quad \widetilde{\widetilde{u}} = \widetilde{u} + \Delta t \, \frac{1-(k+1)\,\Delta t}{(1+\widetilde{u})} \,, \quad u^{k+1} = \frac{1}{2}\Big(u^k + \widetilde{\widetilde{u}}\Big) \,.$$

3) Expériences numériques avec quatre schémas
Dans cette question, on se donne toujours $T = 1.2$ et on choisit $n = 20$ points de discrétisation.

a) Réaliser un programme "python" qui permette de simuler le système (1)(2) avec chacun des quatre schémas numériques : Euler explicite, Euler implicite, Crank-Nicolson et Heun. On transmettra le programme source.

b) Exécuter le programme précédent en précisant la valeur exacte de $u(T)$ ainsi que les quatre valeurs approchées $u_n^e(T)$, $u_n^i(T)$, $u_n^c(T)$, $u_n^h(T)$ obtenues avec les quatre schémas numériques d'Euler explicite, d'Euler implicite, de Crank-Nicolson et de Heun respectivement.

c) Que valent les quatre erreurs numériques $\varepsilon_n^e = |u_n^e(T) - u(T)|$, $\varepsilon_n^i = |u_n^i(T) - u(T)|$, $\varepsilon_n^c = |u_n^c(T) - u(T)|$ et $\varepsilon_n^h = |u_n^h(T) - u(T)|$ dues à l'emploi de chacun de ces quatre schémas ?

4) Etude numérique de la convergence des quatre schémas
Pour les quatre schémas précédents, on demande de réaliser cinq simulations entre les instants 0 et $T = 1.2$ avec un nombre de mailles en progression géométrique :
$n = 20,\ 40,\ 80,\ 160$ et 320 mailles. Il y a donc 20 calculs à effectuer au total.

a) Donner sous la forme d'un tableau les valeurs absolues des cinq erreurs ε_{20}, ε_{40}, ε_{80}, ε_{160}, et ε_{320} commises par chacun des quatre schémas numériques.

b) A l'aide d'une droite de régression préciser la valeur de la pente de la famille de cinq points $\big(\log_{10}(n), \log_{10}(\varepsilon_n^e)\big)$ pour $n = 20,\ 40,\ 80,\ 160,\ 320$ qui relient le logarithme en base 10 des erreurs en fonction du logarithme en base 10 du nombre de mailles pour le schéma d'Euler explicite. On fournira le code source du programme python.

c) Reprendre la question précédente pour les schémas d'Euler implicite, de Crank-Nicolson et de Heun.

5) Etude d'un autre modèle
On cherche maintenant à approcher la solution du problème composé de la condition initiale (2) et de l'équation différentielle

$$(10) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1+u(t)^2}{1+u(t)} \,, \; t > 0$$

à l'instant $T = 2$.

a) A l'aide de la méthode numérique de votre choix, proposer une valeur approchée pour le nombre $u(T)$.

b) En utilisant plusieurs discrétisations, donner un encadrement aussi précis que possible du nombre $u(T)$.