Chapitre (II) Fluide parfait

1) Théorème de Bernoulli pour un filet fluide
2) Théorème de Bernoulli pour un écoulement potentiel
3) pression statique et pression génératrice
4) tube de Pitot
5) tube de Venturi
6) vidange d'un réservoir
7) perte de charge
8) soufflerie basse vitesse
9) Ecoulement incompressible non visqueux bidimensionnel.
10) Ecoulement incompressible non visqueux tridimensionnel

1) Théorème de Bernoulli pour un filet fluide

Daniel Bernoulli 1740

voir Anderson p 177.

- fluide parfait

$$\sigma = -p \, \dot{I}$$

pas de conduction de chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \rho f \\ \rho \dfrac{ds}{dt} = 0 \end{cases}$$

- Hypothèses

* écoulement permanent $\dfrac{\partial}{\partial t} \to 0$

* les forces dérivent d'un potentiel

$$f = -\nabla \Phi$$

usuel : gravité $f = -\vec{g} = -g \nabla z$

* fluide incompressible ou en évolution barotrope

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho_0} \cdot \nabla p$$

ou $\dfrac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h$ h : enthalpie si isentropique

$$de = T\,ds - p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$dh = d\left(e+\frac{p}{\rho}\right) = T\,ds + \frac{1}{\rho}\,dp\,.$$

$$ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla h$$

(R) barotrope $\quad p = G(\rho) \qquad \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla \int \frac{dp(\xi)}{\xi}$

encore noté h !

- Calcul élémentaire

$$\left(\mathrm{div}(\rho\, u \otimes u)\right)_i = \partial_j(\rho u_i u_j) = (\rho u\ \nabla u)_i + \mathrm{div}(\rho u)\,.$$

$$u \cdot \nabla u = \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) + \omega \times u\,.$$

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j u_k = (\mathrm{rot}\ u)_i \quad \text{tourbillon.}$$

$$(\omega \times u)_i = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{j\ell m}}(\partial_\ell u_m)\,u_k$$

$$\varepsilon_{jki}\,\varepsilon_{j\ell m} = \delta_{k\ell}\,\delta_{im} - \delta_{km}\,\delta_{i\ell}$$

$$= (\partial_k u_i)\,u_k - u_k\,\partial_i u_k$$

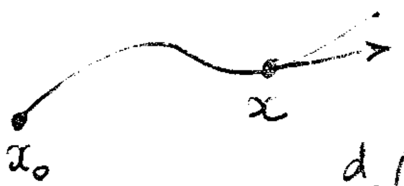
$$= (u\nabla u)_i - \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

• On regroupe pour l'équation de l'impulsion

$$\rho u \cdot \nabla u + \nabla p + \rho \nabla \Phi = 0 .$$

$$\nabla\left(\frac{u^2}{2} + \phi\right) + \frac{1}{\rho} \nabla p + \omega \times u = 0$$

• Ligne de courant



$$\frac{dx}{dt} = u(X(t)) .$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2} + \phi + h\right) = 0$$

car $\left(\omega, u, \frac{dx}{dt}\right) = 0$ puisque $u \parallel \frac{dx}{dt}$.

• (Th) Bernoulli filet fluide

hyp
* fluide parfait
* écoulement permanent
* fluide incompressible ou évolution barotrope $\quad \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla h$
* force volumique dérivant du potentiel Φ

Conclusion $\quad \frac{1}{2} u^2 + h + \Phi =$ cste sur la ligne de courant

2) Théorème de Bernoulli pour écoulement potentiel

- Hypothèses

  * la vitesse u dérive du potentiel φ : $u = \nabla\varphi$

  * fluide parfait $\rho \frac{du}{dt} + \nabla p = \rho f$

  * incompressible ou évolution barotrope

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla h .$$

avec $h = \frac{1}{\rho_0} p$ en incompressible

$h = \int \frac{dp}{\rho}$ en barotrope

$h =$ enthalpie en isentropique

  * la force extérieure dérive d'un potentiel Φ

$$f = -\nabla\Phi$$

- Conclusion

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + h + \Phi = \text{constante dans tout le fluide (fn du temps !)}$$

- Preuve

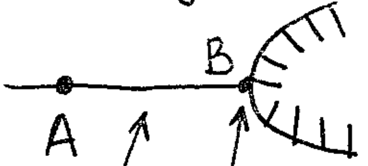
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\frac{u^2}{2} + \overbrace{\omega\times u}^{0} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\Phi = 0$$

ie $\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + h + \Phi\right) = 0 .$ ■

3) Pression statique et pression génératrice

pression d'arrêt

- Configuration géométrique



point d'arrêt (vitesse nulle)

fluide en évolution barotrope.

- Bernoulli filet fluide

$$\frac{1}{2}u_A^2 + h(\rho_A) + \Phi_A = 0 + h(\rho_B) + \Phi_B$$

$\phi_A = \phi_B$ (disons)

$$\underbrace{h(\rho_B)}_{} = \frac{1}{2}u_A^2 + h(\rho_A).$$

pression associée = pression génératrice

- Cas d'un écoulement incompressible

$$h = \frac{p}{\rho_0} \qquad p_g = p_A + \frac{1}{2}\rho_0 u_A^2$$

pression dynamique

- Écoulement isentropique d'un gaz pft polytropique

$$p_g = p_A \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{u_A}{c_A}\right)^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

c_A = vitesse du son au point A

$$h = e + \frac{p}{\rho} \qquad p = (\gamma-1)\rho e \qquad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

$$\left.\begin{array}{l} h = \gamma e = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho} \\ \dfrac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste} \end{array}\right\} h = \frac{\gamma p_0}{(\gamma-1)\rho_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$* \; h_g = h_A + \frac{1}{2}u_A^2$$

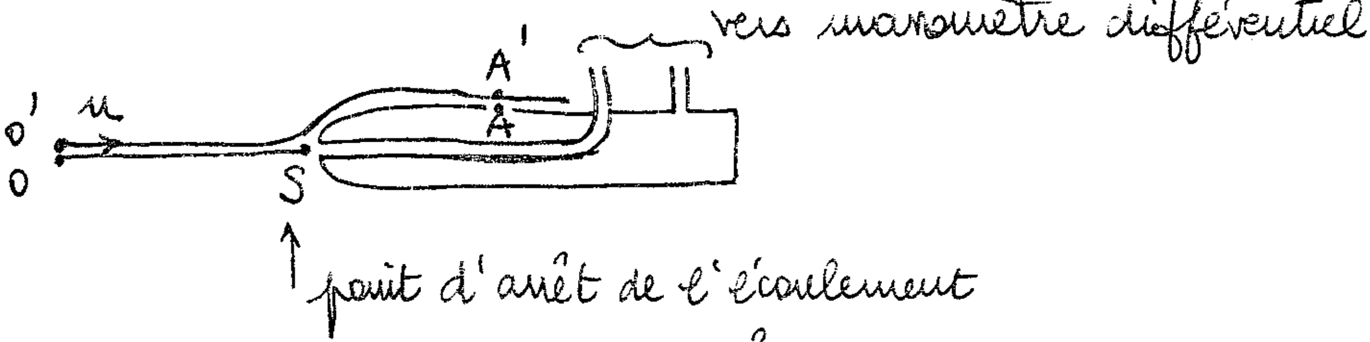
ie $$\left(\frac{p_g}{p_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho_A}{p_A}u_A^2$$

$$= 1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{u_A^2}{c_A^2}$$

$$\frac{p_g}{p_A} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{u_A^2}{c_A^2}\right)^{\gamma/\gamma-1} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

4) Tube de Pitot (Paris, 1732)
(Guyon p194)

- configuration géométrique



point d'arrêt de l'écoulement

$$p_S = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2$$

A → point courant de l'écoulement

$p_A = p_0$ + variation d'altitude négligeable

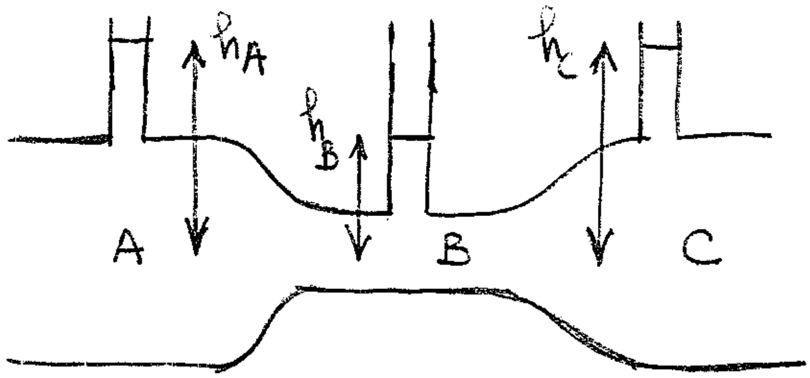
- Mesure de $p_S - p_A = \Delta p$

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho u^2.$$

D'où une première approche de la mesure de la vitesse !

5) Tube de Venturi

- Configuration géométrique



- Cas idéal section A = section C
  et écoulement barotrope à travers le dispositif
  ↪ pas de perte de charge
  Alors $h_A = h_C$ car $u_A = u_C$ et Bernoulli

- Calculs

$$p_A = p_0 + \rho g h_A$$
$$p_B = p_0 + \rho g h_B$$
$$p_C = p_0 + \rho g h_C$$

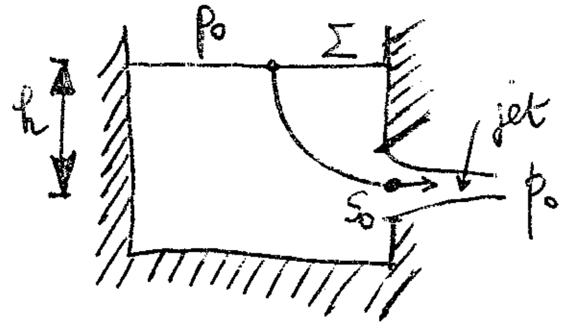
Bernoulli $p_A + \frac{1}{2}\rho u_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho u_B^2 = p_C + \frac{1}{2}\rho u_C^2$

ie $h_A + \frac{1}{2g}u_A^2 = h_B + \frac{1}{2g}u_B^2 = h_C + \frac{1}{2g}u_C^2$

$\frac{S_B}{S_A} = \beta = \frac{u_A}{u_B}$ $2g\,u_B^2 = \frac{h_A - h_B}{1-\beta}$.

6) Vidange d'un réservoir

- Configuration géométrique



- Vitesse dans le jet de sortie

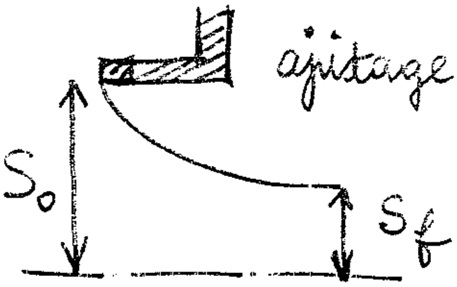
suivre la ligne de courant partant de la surface libre à pression atmosphérique
Négliger la vitesse de descente du niveau liquide
S_0 section veine $\ll \Sigma$ section réservoir

$$p_0 + \rho g z_0 = p_0 + \frac{1}{2} u^2 + \rho g (z_0 - h)$$

donc $u = \sqrt{2gh}$ formule de Torricelli

- Calcul de la section contractée.

Zoom



ajutage de Borda, rentrant dans le récipient !

* Conservation de l'impulsion dans tout le volume du fluide, plus le jet jusqu'à la section S_f

$$\int_S \rho u_x (u \cdot n) + \int_S p n_x = 0$$

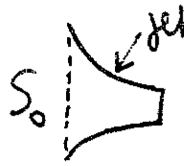
1ère intégrale $= \rho S_f v_f^2$

* 2° intégrale? $p \neq$ pression hydrostatique sauf sur la surface latérale du jet et dans la section de sortie (où elle vaut p_0).

$$p_{hydro} = p_0 + \rho g (z_0 - z)$$

$$\int_S p_{hydro}\, n_x\, d\sigma = 0 \quad \text{car} \int_S p\vec{n} = \text{poids du fluide dans surf } S$$

$$\int_S p n_x\, d\sigma = \underbrace{\int_S p_{hydro}\, n_x\, d\sigma}_{0} + \underbrace{\int_{jet} (p_0 - p_{hydro})\, n_x\, d\sigma}_{\rho g \underbrace{(z - z_0)}_{-h} \int_{jet} n_x\, d\sigma}$$



$$\int_{jet} n_x\, d\sigma = S_0 .$$

$$\text{et} \int_S p n_x\, d\sigma = -\rho g h S_0$$

* Donc $\rho S_f \underbrace{v_f^2}_{2gh} = \rho g h S_0$. $\qquad S_f = \frac{1}{2} S_0$.

le rapport de la section contractée S_f à la section S_0 de l'orifice vaut 1/2

7) Perte de charge

- Quand on ne peut plus appliquer Bernoulli entre deux points

  * évolution non isentrope (dissipation de l'entropie ...)

  * fluide non parfait (viscosité, turbulence, etc ...).

- On pose

$$g \underbrace{\Delta H} = \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + g(z_1 - z_2)$$

↳ perte de charge, en mètres

cf les habitudes des hydroliciens !

- Coefficient de perte de charge

↑ lieu de la perte de charge

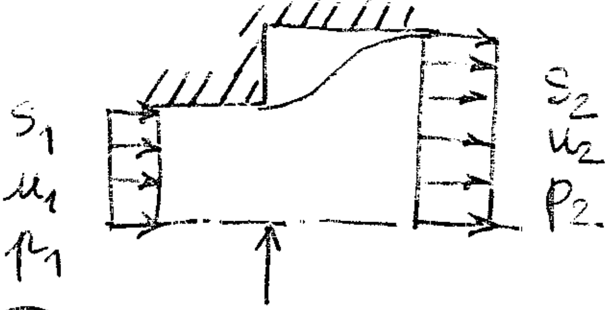
$$\Delta H = K \frac{1}{2g} u_q^2$$

K : coef de perte de charge

→ permet de dimensionner la puissance de l'installation motrice pour maintenir un écoulement permanent !

- Elargissement brusque (Ménard p109)

* Configuration géométrique



(hyp:) la pression statique reste cste dans le tuyau au lieu même de l'élargissement de la section.

* égalité des débits : $\rho u_1 S_1 = \rho u_2 S_2$

* conservation de l'impulsion

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ \rho \vec{u}\,(u.n) + p\vec{n} \right\} d\gamma = 0 \qquad \text{hyp!}$$

projetée sur Ox : $S_2(\rho u_2^2 + p_2) = S_1(\rho u_1^2 + p_1) + (S_2 - S_1)p_1$

ie $\frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) = u_2^2 - \frac{S_1}{S_2} u_1^2$

* perte de charge $\qquad g\Delta H = \frac{1}{2} K_1 u_1^2$

$$g\Delta H = \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) + \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)$$

$$= \frac{1}{2}u_1^2 \left(2\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 2\frac{S_1}{S_2} + 1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \right)$$

$$= \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{1}{2} u_1^2 \qquad K_1 = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

$K_1 \to 1$ si $S_2 \to +\infty$.

- autres configurations → savoir faire de l'ingénieur ! IAT (Chenel)

8) Soufflerie subsonique à retour
(Eiffel 1911)

- introduction Anderson p123
- perte de charge et puissance de la motorisation Menard p -105
- voir R. Chenel pour le dimensionnement de S10.

9) Ecoulement incompressible non visqueux bidimensionnel

- Ecoulement potentiel

$$u = \nabla\varphi$$

* Bernoulli pour évaluer la pression

$$\nabla\left(\frac{u^2}{2} + h + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Phi\right) + \mathrm{rot}\,u \times u = 0$$

* Ecrire la conservation de la masse

$$\Delta\varphi = 0$$

- Fonction courant

$\mathrm{div}\, u = 0 \rightarrow$ $\vec{u} = \vec{\mathrm{rot}}\,\psi$

sous des hypothèses ad hoc !

$u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$

alors $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$ s'écrit

$$\mathrm{rot}\,(\vec{\mathrm{rot}}\,\psi) = \underbrace{\nabla(\mathrm{div}(\psi\vec{k}))}_{0} - \Delta\psi$$

et $\Delta\psi = 0$

- Conditions aux limites en surface

Non pénétration dans la paroi

$$u \cdot n = 0$$

* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ Neumann

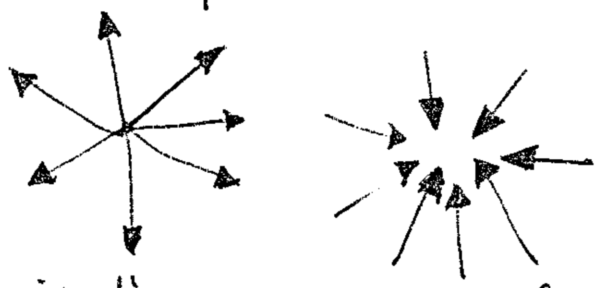
* $\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0$ $\psi = \text{cste}$ Dirichlet

$\Rightarrow$ Modèle linéaire de fluide parfait !

• Écoulement uniforme ① ← premier écoulement élémentaire

$\xrightarrow{}\,u_\infty$ $\quad \phi = u_\infty\, x \qquad \psi = u_\infty\, y$

• Source et puits ②



jet d'eau. lavabo.

vitesse radiale V_r ; vitesse angulaire V_θ

$$\mathrm{div}\, u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta)$$

ici $V_\theta = 0$, $rV_r =$ cte $= c$

* flux de masse / lg $\quad \dot{m} = \int_{\text{contour}} \rho\, u \cdot n \, d\gamma$

qui ne dépend pas du contour (conservation de la masse). On choisit le cercle de rayon 1

$$\dot{m} = \rho \;\; c \;\; 2\pi$$

$\frac{\dot{m}}{\rho}$ = flux volumique par seconde $\equiv \Lambda$

alors $c = \frac{\Lambda}{2\pi}$

$$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r}$$

* Potentiel scalaire $\qquad u = \begin{cases} \partial\varphi/\partial r \\ \frac{1}{r}\,\partial\varphi/\partial\theta \end{cases}$

$$\varphi = \frac{\Lambda}{2\pi}\log r$$

* fonction courant

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r} \quad ; \quad -\frac{\partial \psi}{\partial r} = V_\theta = 0$$

$$\psi = \frac{\Lambda}{2\pi}\theta$$

- Ecoulement uniforme combiné avec une source.

* les potentiels s'ajoutent !

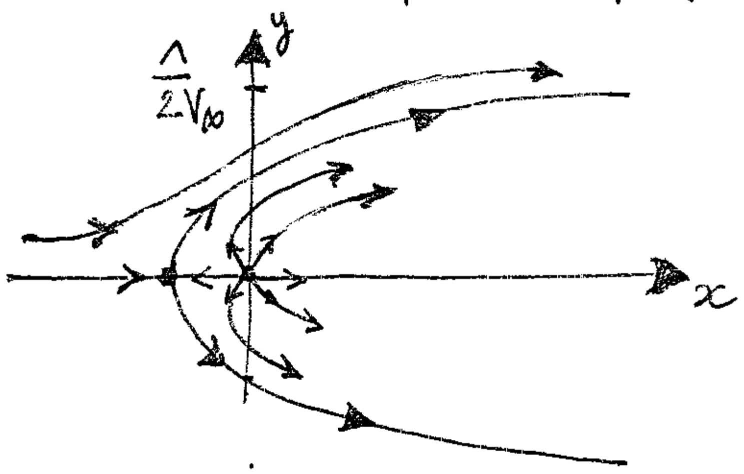
$$\psi = V_\infty r \sin\theta + \frac{\Lambda}{2\pi}\theta \qquad \varphi = V_\infty r\cos\theta + \frac{\Lambda}{2\pi}\log r$$

* point d'arrêt : $V_\infty \cos\theta + \frac{\Lambda}{2\pi r} = 0 \; ; \; V_\infty \sin\theta = 0$

$$r = \frac{\Lambda}{2\pi V_\infty} \; ; \; \theta = \pi \; ; \; \text{alors } \psi = \frac{\Lambda}{2}$$

courbe $\psi = \frac{\Lambda}{2}$ → ligne de courant passant par le point d'arrêt

↳ interprétation physique = paroi.



$$r\sin\theta = \frac{\Lambda}{2V_\infty}\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)$$

(exo) écoulement uniforme avec une source et un puits. Voir Anderson p144.

- Doublet (dipôle en électrostatique) ③

source et puits distants d'une distance l et de force opposée Λ.

$\xleftrightarrow{\;l\;}$

source Λ — puits $-\Lambda$

$$\begin{cases} l \to 0 \\ l\Lambda = \text{cste} = K \end{cases}$$

$$\psi = \frac{\Lambda}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \longrightarrow \psi = -\frac{K}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}$$

De même, $\varphi = \dfrac{K}{2\pi}\dfrac{\cos\theta}{r}$

- Ecoulement non portant autour d'un cylindre circulaire

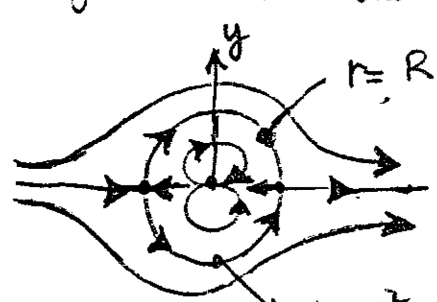
* mettre un doublet dans un écoulement uniforme

$$\psi = V_\infty r\sin\theta - \frac{K}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} = V_\infty r\sin\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

point d'arrêt $\qquad R^2 = \dfrac{K}{2\pi V_\infty}$

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = \left(1 - \dfrac{R^2}{r^2}\right) V_\infty\cos\theta \\[2mm] V_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = -\left(1 + \dfrac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin\theta \end{cases}$$

$V_r = V_\theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 0 \quad r = R$, alors $\psi = 0$



ligne de courant $\psi = 0$
$r = R \rightarrow$ cylindre.

point de vitesse maximale $= 2V_\infty$.

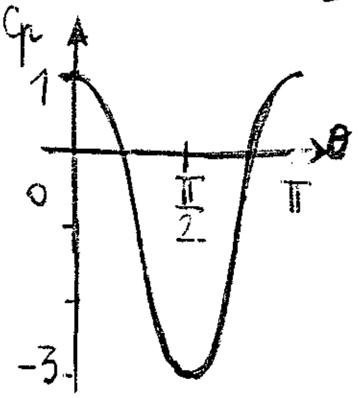
* Coefficient de pression

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} \quad \text{sur la paroi } (r = R).$$

Bernoulli : $\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = cste = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2}$

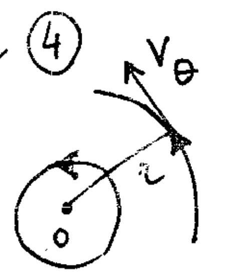
$$C_p = 1 - \frac{u^2}{V_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta$$

car $u^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = V_\infty^2\left[1 + \frac{R^4}{r^4} + 2\frac{R^2}{r^2}\left(2\sin^2\theta - 1\right)\right]$



même pression sur la partie supérieure et inférieure du cylindre
→ pas de portance

• Vortex (4)



$V_\theta = V_\theta(r)$, $V_r = 0$

rot u = 0 ⇒ la circulation autour de l'origine Γ ne dépend pas du contour.

$$\Gamma = \int_\Gamma u \cdot \tau \, d\gamma = V_\theta \, r \cdot 2\pi \qquad V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

potentiel scalaire $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$

fonction courant $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log r.$

(R) Dans les 3 autres cas, φ = fonction(x,y) bien défini, ce qui n'est pas le cas ici (cf $r=0$!)

Donc rot u ≠ 0 en ce pt → singularité
→ tourbillon local
→ écoulement potentiel hors de l'origine

- Ecoulement portant autour d'un cylindre (tournant)

* écoulement non portant $\psi = V_\infty r \sin\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$
plus un vortex $\psi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r}{R}$.

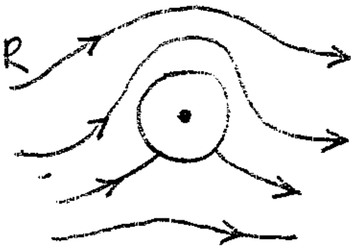
$$\psi = V_\infty r \sin\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r}{R}$$

$$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos\theta \qquad V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

* Point d'arrêt $V_r = V_\theta = 0$

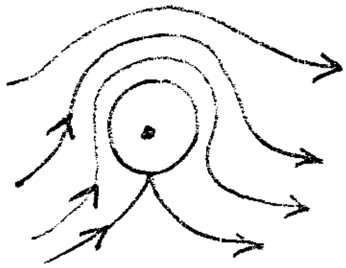
$$r = R \text{ et } \sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} \quad \text{ou} \quad \cos\theta = 0 \ \ldots$$

o $\Gamma < 4\pi V_\infty R$



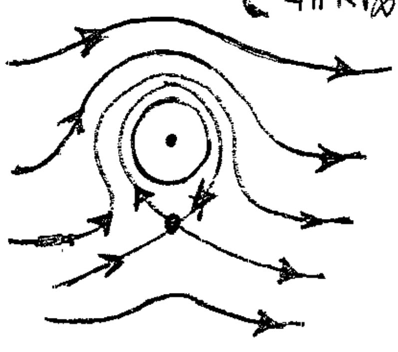
2 $\Gamma < 0$ sur la figure

o $\Gamma = 4\pi R V_\infty$



o $\Gamma > 4\pi R V_\infty$ $\quad r = R\left(\frac{\Gamma}{4\pi R V_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}\right)^2 - 1}\right)$

prendre la racine $> R$



* coefficient de pression

$$C_p = 1 - \left(\frac{u}{u_\infty}\right)^2 = 1 - \left[4 \sin^2\theta - \frac{2\Gamma \sin\theta}{\pi R V_\infty} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R V_\infty}\right)^2\right]$$

portance $= -\int_{-\pi}^{\pi} p \sin\theta \, ds$.

traînée $= -\int_{-\pi}^{\pi} p \cos\theta \, ds = 0$

$$- \text{portance} = \int_{-\pi}^{\pi} p \sin\theta \, R \, d\theta = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \int_{-\pi}^{\pi} C_p \sin\theta \, R \, d\theta$$

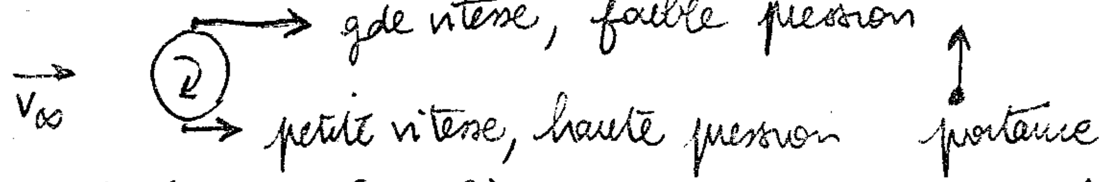
$$-L_{ift} = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot \frac{2\Gamma}{\pi R V_\infty} R \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \rho_\infty V_\infty \Gamma .$$

cf Th de Kutta - Joukovski (1910)

* Quid en pratique?

cylindre fixe → pas de portance, de la traînée

cylindre tournant → on a une portance finie.



cf bateau de Cousteau (1990?). Effet Magnus (1852)

10) Ecoulement incompressible non visqueux tridimensionnel

- Ecoulement potentiel

$$u = \nabla \varphi \qquad \Delta\varphi = 0$$

fonction courant ? potentiel vecteur !

$$\operatorname{div} u = 0 \rightarrow u = \operatorname{rot}\psi \qquad \psi \in \mathbb{R}^3$$

② condition de jauge, etc... bof !

- écoulement uniforme $\quad \varphi = V_\infty x$

- source et puits

débit volumique Λ

$$v_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad v_\varphi = v_\theta = 0$$

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r} \qquad -\Delta\varphi = Q\delta(r)$$

- Dipôle

$$v_r = K\frac{\cos\varphi}{2\pi r^3} \; ; \; v_\varphi = K\frac{\sin\varphi}{4\pi r^3}$$

$$\Phi = -\frac{K\cos\varphi}{4\pi r^2} \qquad -\Delta\Phi = K\delta'(r) \quad (\text{signe OK?})$$

- Dipole dans un champ uniforme → sphère

$$\Phi = V_\infty r\cos\varphi - K\frac{\cos\varphi}{4\pi r^2}$$

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{\partial\phi}{\partial r} = \left(V_\infty + \dfrac{K}{2\pi r^3}\right)\cos\varphi \\ V_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -\left(V_\infty - \dfrac{K}{4\pi r^3}\right)\sin\varphi \end{cases}$$

$$V_r \equiv 0 \text{ si } r = R \iff K = -2\pi V_\infty R^3$$

alors $\Phi = V_\infty \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) r\cos\varphi$

$$u_r = V_\infty\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\varphi \,,\; u_\varphi = -V_\infty\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\sin\varphi \,,\; u_\theta = 0$$

- Tourbillon ?

pas d'analogue aussi simple qu'en 2D ...

voir plus loin au chapitre 6 !