

- 1) Introduction à l'acoustique
- 2) angle de Mach
- 3) Relations de saut de Rankine-Hugoniot
- 4) Tuyères
- 5) choc oblique stationnaire
- 6) Détente de Prandtl-Meyer
- 7) Tube à choc

1) Introduction à l'acoustique

• Contexte

fluide parfait $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$

vitese du son $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(p, \rho) = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\text{gas pft})$

vitese telle que $u^2 \ll c^2$ $\left\{ \begin{array}{l} c^2 \text{ pas infini} \\ (\text{fl. incompressible}) \end{array} \right.$

↳ on linéarise les équations d'Euler de la dynamique des gazs autour d'un état constant de vitese nulle.

$$(c_0)(\text{air}) = 344 \text{ m/s}$$

$$(c_0)(\text{eau}) = 1500 \text{ m/s}$$

• les fluctuations de pression

* disons qu'elles sont harmoniques de fréquence f
oreille: $20 \text{ Hz} \leq f \leq 20 \text{ kHz}$ Typiquement
maximum sensibilité de l'oreille: 3 kHz

(sifflet d'un agent de police)

* gde variété dans les puissances mises en jeu
de 10^{-10} à 10^5 watts

$p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ dans l'air (seuil d'audition à 1 kHz)
→ des décibels

$$\text{PWL} = 10 \log_{10} (\text{puissance} / 10^{-12} \text{ Watts}) \quad \text{sound power level}$$

$$\text{SPL} = 20 \log_{10} (p' / p_{\text{ref}}) \quad \text{sound pressure level}$$

↑ fluctuation de pression p'_{RMS} $\left\{ \begin{array}{l} \text{root} \\ \text{mean} \\ \text{square} \end{array} \right.$

(ex) $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$

bruit de 140 dB $p'_{\text{rms}} = 200 \text{ Pa}$

alors $\frac{p'}{p_0} = \frac{p'}{\rho_0 c^2} \leq 10^{-3}$

$u' \sim p'/\rho c \approx 0,5 \text{ m/s}$ dans ce cas

$\Delta = \frac{u'}{\omega}$ si en est à la pulsation $\omega = 2\pi f$
 $\Delta = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ déplacement fluide.

(ex) SPL = 0 dB $p'_{\text{rms}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$

$u' \sim 5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$ $\Delta = 10^{-11} \text{ m}$.

- Linéariser ou pas?

$\Delta \ll$ échelle de longueur de la géométrie

$\Delta \sim \lambda_{\text{pm}} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. en même inférieur!

- Equations de l'acoustique.

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} !$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} u' = 0$$

$$\rho \frac{du}{dt} + \nabla p = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \nabla p' = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial s'}{\partial t} = 0$$

alors le modèle de fluide barotrope est approprié!

$$p' = c_0^2 \rho' + 0 \quad \nabla$$

↪ équation d'état linéarisée!

- Equation d'onde

Eliminer la vitesse des équations précédentes

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \sum_j \frac{\partial^2 p'}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{ie} \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p' = 0$$

de même,

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p' = 0$$

Bernoulli linéarisé $u' = \nabla \varphi'$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u'}{\partial t} - c_0^2 \Delta \varphi' = 0$$

- Equation de Lighthill des sources sonores (1954).
pm \rightarrow voir Hirschberg p 23.

- Cas harmonique: équation de Helmholtz (\approx 1860)

$$p' = \hat{p} e^{i\omega t}$$

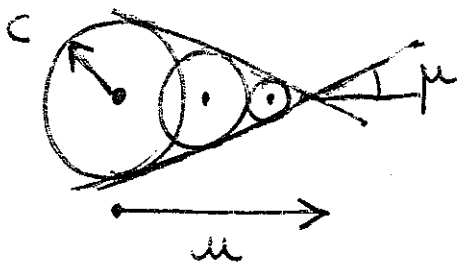
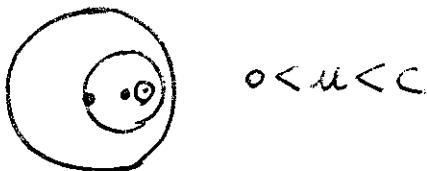
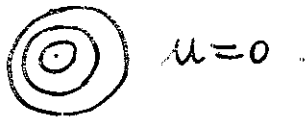
$$\rightarrow \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\omega^2 p'$$

$$\Delta p' + \frac{\omega^2}{c_0^2} p' = 0$$

Eqn de Helmholtz

2) Angle de Mach (1887)

- Que se passe-t-il si on émet des ondes depuis un engin se déplaçant à la vitesse u ?



Les ondes émises s'accumulent le long d'une caustique \hookrightarrow cône, de demi-angle au sommet μ .

$$\sin \mu = \frac{c}{u} = \frac{1}{M} \quad \left. \begin{array}{l} \mu = \text{angle de Mach.} \\ M = \text{nombre de Mach} \end{array} \right\}$$

- (R) analogue: électrons Cherenkov, qui vont plus vite que la lumière (dans le milieu)
 quid des tachyons? ($u > \text{lumière} \text{!}$).

3) Relations de saut de Rankine - Hugoniot

1870

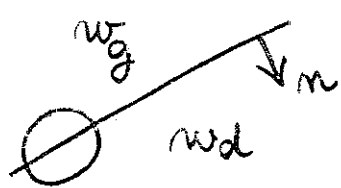
1889

- Les équations d'Euler de la dynamique des gaz sont compatibles avec solutions discontinues \rightarrow solutions faibles des équations
- Prendre la forme conservative

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \Psi(w) = 0$$

$$- \int_{\Omega} \left\{ w \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Psi(w) \nabla \varphi \right\} dx dt = 0 \quad \forall \varphi \text{ finit}$$

- Cas où l'on a une discontinuité



surface (spatio temporelle) de discontinuité ; normale n .

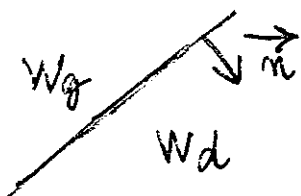
$\uparrow \varphi$ non nulle dans cette région

on fait les calculs de l'intégration par parties.

$$[w] n_t + [\Psi(w)] n_x = 0$$

$[] =$ saut à travers la discontinuité
 $=$ valeur à droite $-$ valeur à gauche

- Exemple: onde de choc stationnaire ou contact



$$[\rho u \cdot n] = 0$$

$$[\rho u (u \cdot n) + p n] = 0$$

$$[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} \right) \cdot n] = 0$$

$m = \rho u \cdot n$ flux de masse à travers la discontinuité.

$$\left[\frac{m^2}{\rho} + p \right] = 0 \quad \text{impulsion normale}$$

$$m [u \cdot \vec{e}] = 0 \quad \text{impulsion tangentielle.}$$

$$m = 0 \Rightarrow [p] = 0 \quad [u \times n] \neq 0, [H] \neq 0$$

contact, ligne de glissement

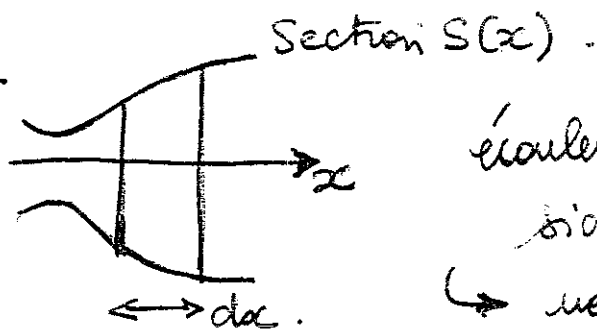
$$m \neq 0 \Rightarrow [p] \neq 0 \quad [u \times n] = 0, [H] = 0$$

choc, compression.

$$m [H] = 0 \quad \text{Énergie ; } H = \frac{u^2}{2} + e + \frac{p}{\rho}$$

enthalpie totale

4) Tuyères



écoulement quasi-mouvement
bidimensionnel

↳ négliger la variation par rapport à y des divers champs.

- On intègre les équations de bilan dans le petit volume $\Omega = S dx$ entre deux sections x et $x+dx$ proches de la tuyère.

$$\star \text{ masse } \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \right\} dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho S dx) + [\rho u \cdot \vec{n}]_x^{x+dx} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u S) = 0$$

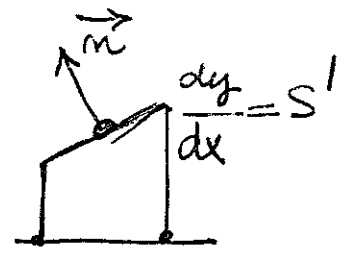
* impulsion selon x

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \vec{u}) + \frac{\partial p}{\partial x} \right\} dv = 0.$$

regarder en détail le terme de pression

$$\int_{\partial\Omega} p n_x d\sigma = \left[(\rho S) \right]_{x}^{x+dx} - p dS$$

$$= \frac{dp}{dx} S dx.$$



Donc $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 S) + S \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$

* Énergie $\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho u H) \right\} dv = 0.$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u H S) = 0.$$

• Cas stationnaire

$$\begin{cases} \rho u S = \text{cte} \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 S) + S \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ H = \text{cte} \quad H = \frac{u^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} \end{cases}$$

choc (éventuel) $[\rho u] = 0, [\rho u^2 + p] = 0, [H] = 0$

l'enthalpie totale est quasiment constante

hors des chocs, l'entropie s est constante

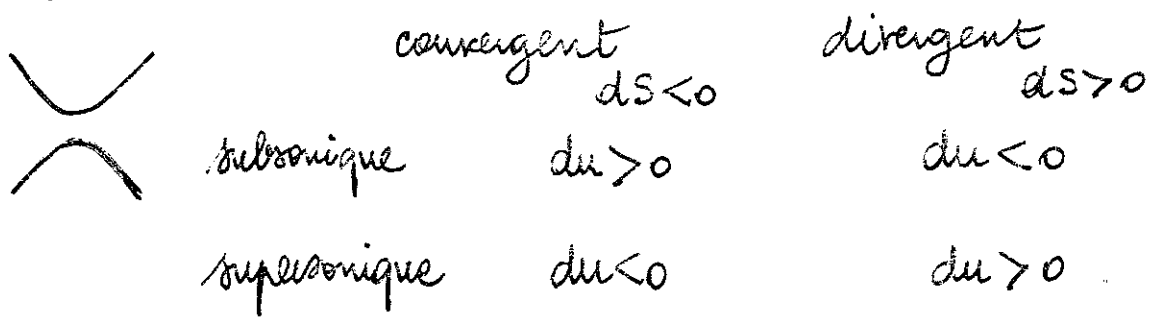
$$[s] \geq 0 \text{ dans un choc (si } \rho u > 0)$$

• Variation des champs

$$\frac{u^2}{2} + h = \text{cte} \quad dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp$$

$$\frac{d(\rho u)}{\rho u} = \frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} = \frac{dh}{c^2} + \frac{du}{u} = (1 - M^2) \frac{du}{u}$$

$$\frac{d(\rho u)}{\rho u} + \frac{ds}{s} = 0$$



D'où l'importance du col sonique!

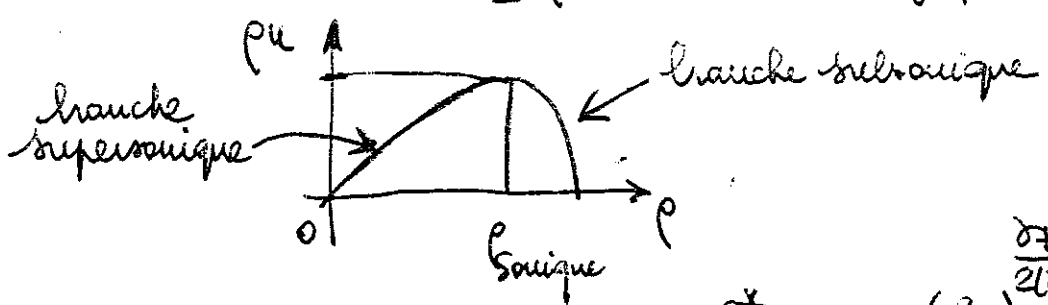
• Débit limite d'une tuyère de De Laval (Suède, ?)

* données : température d'anêt T_0 } enthalpie $h_0 = c_p T_0$
 en pression d'anêt p_0 } entropie

alors via une détente isentropique, $S_0 = e^{s_0/c_p} = (RT_0)^{\gamma/(1-\gamma)} p_0^{\gamma/(1-\gamma)}$
 on peut construire beaucoup de choses

$$h_0 = \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma-1}$$

Donc si $S \equiv S_0$, $\frac{1}{2}(\rho u)^2 = h_0 \rho^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma+1}$

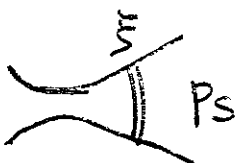


$$\rho u \leq \text{valeur critique} \equiv \frac{Q^*}{A_{\text{col}}} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}}$$

• Divers régimes d'écoulement.

* $p_s = p_0$ mais ne se passe $u=0$
 \rightarrow pression de sortie

* $p_1 < p_s < p_0$ écoulement subsonique partout
 \leftarrow écoulement subsonique dans le convergent, sonique au col, puis subsonique dans le divergent

* $p_2 < p_s < p_1$ 

écoulement subsonique dans le convergent, sonique au col, supersonique dans une certaine zone du divergent, choc en $x = \xi$, écoulement subsonique dans le divergent après le choc

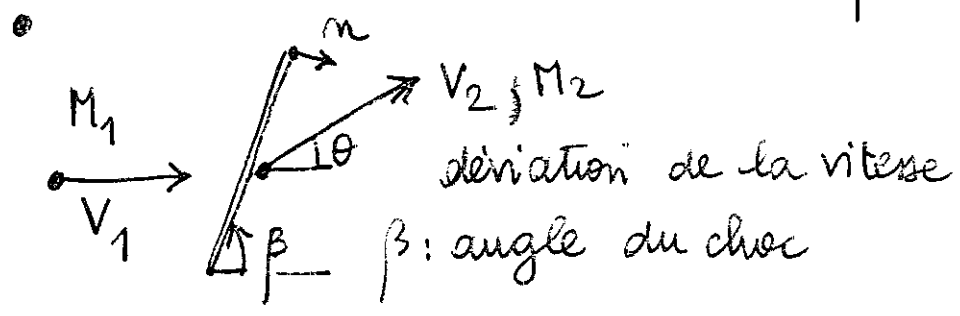
$p_s = p_2$: le choc est positionné à la sortie de la tuyère

* $p < p_3$ ou $p_3 < p < p_2$ pas de solution!

* $p = p_3$ écoulement subsonique dans le convergent, sonique au col, supersonique dans tout le divergent.

5) Choc oblique stationnaire

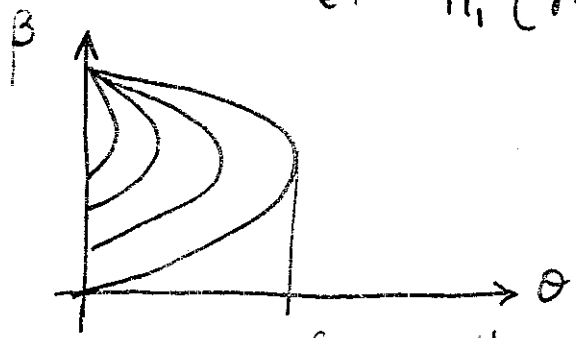
Auderson p347 et suivantes



• Ecrire avec soin Rankine-Hugoniot

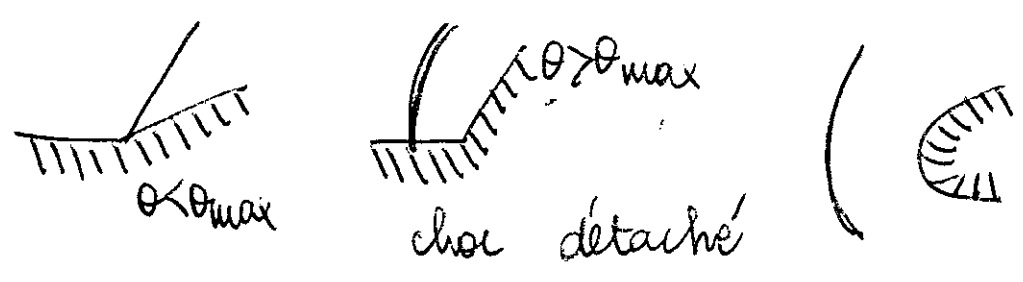
$$\begin{aligned}
 [\rho u n] &= 0 \\
 [\rho(u n)^2 + p] &= 0 \quad [u x m] = 0 \\
 [H] &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left\{ \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right\}$$

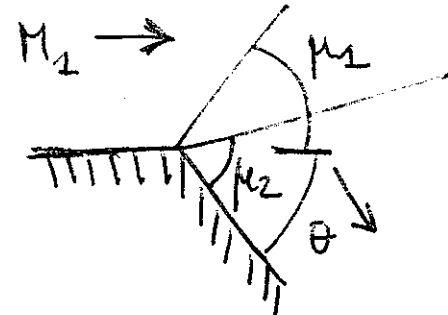


angle de déviation maximale $\theta_{max} \approx 45^\circ$ si $\gamma = 7/5$.

• Un choc se détache devant un coin pas assez aigu ou un corps émoussé.



6) Détente de Prandtl - Meyer

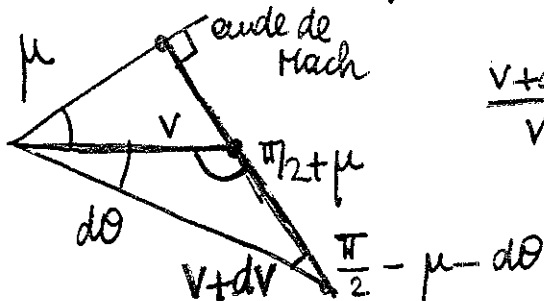
- 

* μ_1 : angle de Mach de l'écoulement n°1
idem μ_2 .

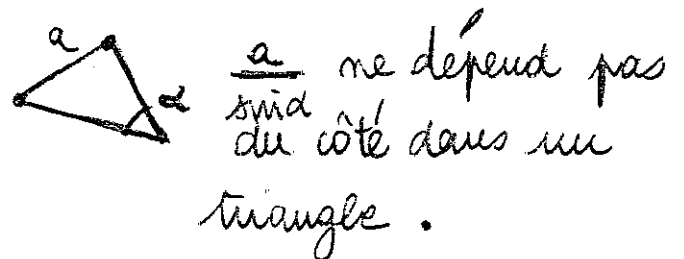
* θ angle d'ouverture

- isentropique \rightarrow beaucoup de relations, v

- $$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$



$$\frac{V+dV}{V} = \frac{\sin(\pi/2 + \mu)}{\sin(\pi/2 - \mu - d\theta)}$$



puis des calculs

- $$\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1)$$

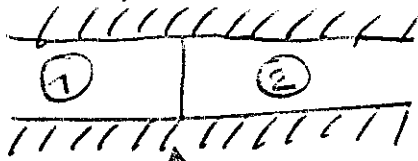
$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}$$

$$\nu(M) = 0 \text{ si } M = 1$$

7) Tube à choc

ou problème de Riemann (1860)

- Problème physique



↑ membrane, qui éclate à $t=0$.

Quelle évolution ?

- pas d'échelle en x dans la condition initiale

équation $\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0$ gaz monoatomique

$w(t, x)$ solution

$\lambda > 0$ $w(\lambda t, \lambda x)$ encore solution.

invariance de l'équation par changement d'échelle en espace et en temps.

ca initiale $w(0, dx) = w(0, x)$

Donc $\forall t, w(\lambda t, \lambda x) = w(t, x)$

$w = \tilde{w}\left(\frac{x}{t}\right)$ solution autosemblable.

- Détente $df(w) \cdot \frac{dw}{d\xi} = \xi \frac{dw}{d\xi} \quad \xi = \frac{x}{t}$

→ caractéristique des flux, valeur propre $\lambda(w) = u - c, u, u + c$

Donc $\xi = \lambda(w)$.

$$\frac{dw}{d\xi} = \tau(w(\xi))$$

↑ valeur propre associée.

* Champ vraiment non linéaire

$\nabla \lambda \cdot \mathbf{x} \neq 0 \quad \forall \text{ point} \rightarrow u-c, u+c$
 invariants de Riemann: vérifié

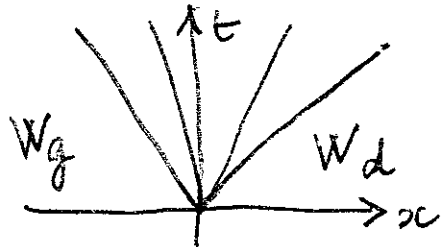
$$\nabla \lambda \cdot \mathbf{x} \equiv 0$$

- ① $\lambda, u + \frac{2c}{\gamma-1}$
- ③ $\lambda, u - \frac{2c}{\gamma-1}$

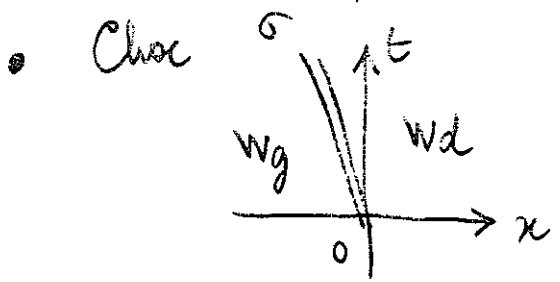
* Champ linéairement dégénéré $\rightarrow \textcircled{u}$
 λ est un invariant de Riemann.

• Convention $\nabla \lambda \cdot \mathbf{x} \equiv 1$ le long d'un champ VNL
 alors $\lambda(\xi)$ est fn \uparrow de ξ dans une détente

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = 1 \quad \nabla$$



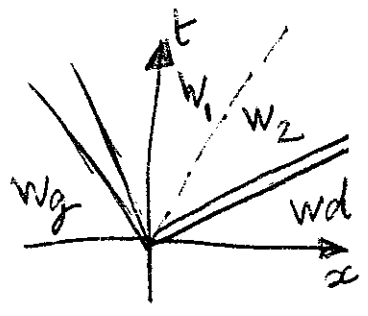
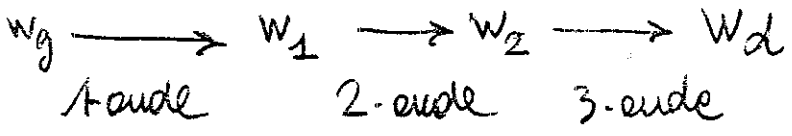
Quid si on veut avoir $\lambda(w_d) < \lambda(w_g)$?



on écrit Rankine Hugoniot dans l'espace-temps

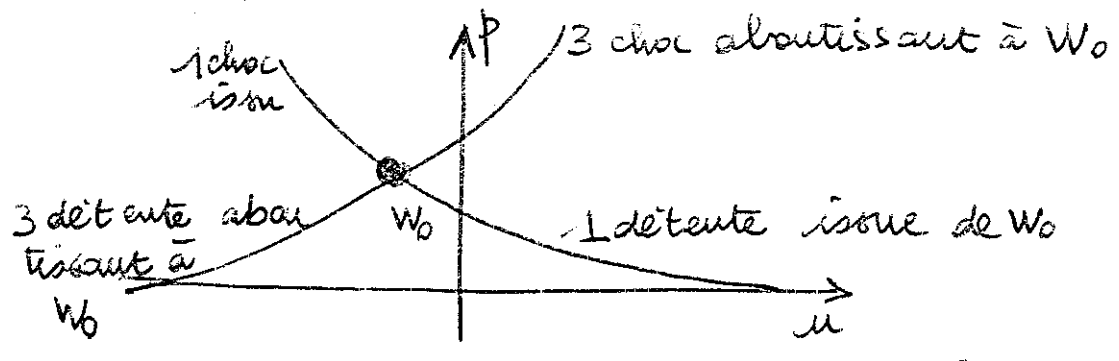
$$[\beta w] = \sigma [w]$$

• Construction de Lax (1954)

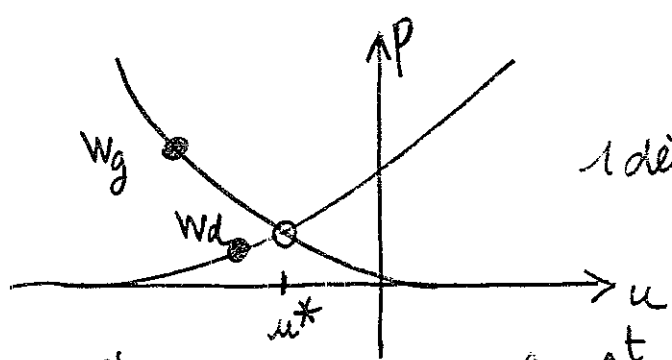


• Construction pratique

* dans l'espace des états

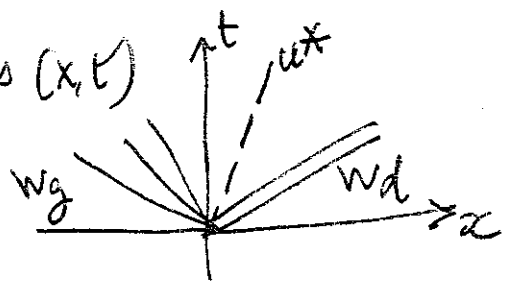


plan des courbes de Riemann du second champ



1 détente suivie d'une 3-choc

* dans l'espace-temps (x, t)



- Application aux méthodes numériques
 - Godunov (1959)
 - Van Leer (1979)