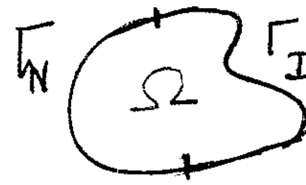
Chapitre VI Modélisation mathématique

1) Formulation variationnelle
2) Problème de Stokes
3) Conditions aux limites en hydrodynamique
4) Conditions aux limites en dynamique des gaz
5) Limite incompressible

Entre l'écriture "brutale" des équations à partir des principes de base de la physique et une méthode numérique qui donne des résultats corrects, il faut travailler et se poser des questions sur les mathématiques sous-jacentes.

1) Formulation variationnelle

- problème modèle



$\varphi = 0$ sur Γ_D

$$-\Delta\varphi = f \text{ dans } \Omega$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = g \text{ sur } \Gamma_N$$

- Cadre de l'analyse fonctionnelle

$$V = \{ v \in L^2(\Omega),\ \nabla v \in L^2(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}.$$

$$(1) \begin{cases} \varphi \in V \\ a(\varphi, v) = L(v) \qquad \forall v \in V \end{cases}$$

(Th) a est bilinéaire continue α-elliptique sur V

$\exists \alpha > 0, \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$

L linéaire continue sur V

alors (1) admet une solution unique $\varphi \in V$

{Problème elliptique}

- formulation variationnelle :
  trouver $a(\cdot,\cdot)$, $L(\cdot)$ et surtout V !

$-\Delta\varphi = f$ on multiplie par $v \in V$ et on intègre par parties :

$$\int_\Omega -\Delta\varphi\, v\, dx = \int_\Omega \nabla\varphi\, \nabla v\, dx - \int_{\Gamma_N} \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{g} v\, d\gamma - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \underbrace{v}_{0}\, d\gamma$$

$$a(\varphi,v) = \int_\Omega \nabla\varphi\, \nabla v\, dx$$
$$L(v) = \int_\Omega f v\, dx + \int_{\Gamma_N} g v\, d\gamma$$

- α-ellipticité de $a(\cdot,\cdot)$; oui dès que $\Gamma_D \neq \phi$ (ou $\Gamma_D \neq$ morceau de $\partial\Omega$ de mesure nulle).

2) Problème de Stokes

- fluide incompressible de vitesse très faible

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0. & \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u + \dfrac{\nabla p}{\rho} - \nu\Delta u = f & \Omega \end{cases}$$

$u = 0$ sur $\partial\Omega$ (pour fixer les idées).

$u.\nabla u$ est négligé dans ce modèle linéarisé

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ par hypothèse

$\rho = 1$ par habitude.

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 & \Omega \\ -\nu \Delta u + \nabla p = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

- formulation variationnelle

$V = \{ v \in L^2, \nabla v \in L^2, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \operatorname{div} v = 0 \}$

On multiplie par $v \in V$ et on intègre par parties

$$\int_\Omega \nu \Delta u \, v \, dx = \int_\Omega \nu \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial n} \underbrace{v}_{\to 0} \, d\gamma$$

$$\int_\Omega \nabla p \, v \, dx = -\int_\Omega p \underbrace{\operatorname{div} v}_{0} \, dx + \int_{\partial\Omega} p \underbrace{(v \cdot n)}_{0} \, d\gamma$$

il reste
$$\begin{cases} u \in V \\ \nu (\nabla u, \nabla v) = (f, v) & \forall v \in V \end{cases}$$
(Leray 1934)

(Trop) simple :

* On a éliminé la pression
* Comment faire des calculs dans l'espace V, qui contient la contrainte $\operatorname{div} v = 0$ difficile à discrétiser ?

- Dualiser la contrainte d'incompressibilité.

$$W = \{v \in L^2, \nabla v \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\nu \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega \mu \,\mathrm{div}\, v \, dx - \int_\Omega f v \, dx$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \cdot \delta v = \nu \int_\Omega \nabla v \, \nabla(\delta v) \, dx - \int_\Omega \mu \,\mathrm{div}(\delta v) \, dx - \int_\Omega f \delta v \, dx$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} \cdot \delta\mu = - \int_\Omega \delta\mu \,\mathrm{div}\, v \, dx$$

(u, μ) solution du point selle vérifie

$$\mathrm{div}\, u = 0$$

$$\forall \delta v, \quad \nu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\delta v) \, dx - \int_\Omega \mu \,\mathrm{div}(\delta v) \, dx = \int_\Omega f \delta v \, dx$$

on intègre par parties à l'envers pour faire apparaître δv et non plus ses dérivées

$$\nu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\delta v) \, dx = -\nu \int_\Omega \Delta u (\delta v) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \underbrace{\delta v}_{0} \, d\sigma$$

$$- \int_\Omega \mu \,\mathrm{div}(\delta v) \, dx = \int_\Omega \nabla\mu \, \delta v \, dx - \int_{\partial\Omega} \mu \underbrace{(\delta v \cdot n)}_{0} \, d\sigma$$

donc $\displaystyle\int_\Omega \underbrace{(-\nu \Delta u + \nabla\mu - f)}_{=0} \delta v \, dx = 0$

μ est exactement la pression, qui s'interprète donc comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de divergence nulle

3) Conditions aux limites en incompressible.

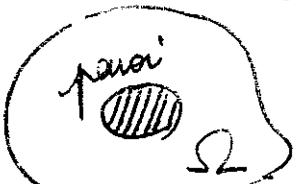
- Principe : chercher une formulation variationnelle
  intégrer par parties
  puis regarder les termes de bord, qui peuvent s'interpréter en termes de conditions aux limites.

- Euler incompressible

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \cdot \nabla u}_{\omega \times u + \frac{1}{2}\nabla u^2} + \dfrac{\nabla p}{\rho} - f = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega uv\,dx + \int_\Omega (\omega, u, v)\,dx - \int_\Omega \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) \operatorname{div} v\,dx - \int_\Omega f v\,dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \underbrace{\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right)}_{\to \text{ donné sur la frontière fluide ?}} \underbrace{(v \cdot n)}_{0 \text{ à la paroi}}\,d\sigma = 0$$



frontière fluide

$$\int_\Omega \operatorname{rot} u\,(u \times v) = \int_\Omega u \operatorname{rot}(u \times v) + \int_{\partial\Omega} (u \times n)(u \times v)\,d\sigma$$

qu'en tirer ?

• Navier Stokes incompressible.

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0. \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \omega \times u + \dfrac{1}{2} \nabla u^2 + \dfrac{1}{\rho} \nabla p - \underbrace{\dfrac{1}{\rho} \operatorname{div} \tau}_{\nu \Delta u} = f. \end{cases}$$

terme en plus : $\dfrac{1}{\rho} \displaystyle\int_\Omega \tau \cdot \nabla v \, dx$

$\tau = 2\mu D.$ $\qquad - \dfrac{1}{\rho} \displaystyle\int_{\partial\Omega} (\tau \cdot n) \, v \, ds$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{donné} \\ \text{à la frontière fluide?} \end{array} \right.$ $\qquad$ 0 à la paroi

plus précisément $\sigma \cdot n =$ donné ?

$\dfrac{u^2}{2} + \sigma \cdot n =$ donné ?

• Il y a encore des travaux de base sur le sujet de conditions aux limites conduisant à un pb bien posé (au sens de Hadamard)

ie $\begin{cases} EDP(u,p) = f & \Omega \\ CL(u,p) = g & \partial\Omega \end{cases}$

$\exists ! \, (u,p) \in$ bon espace

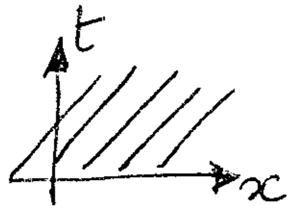
$\|(u,p)\| \leq C \left(\|f\| + \|g\| \right)$

dépendance continue de la solution en fonction des données.

4) Conditions aux limites en compressible

• Problème modèle : advection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



* Solution exacte $u = u_0(x-at)$

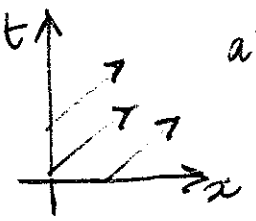
* Formulation variationnelle ?

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega uv - \underbrace{\int_\Omega u\frac{\partial}{\partial x}(av)}_{\text{même forme que le terme de départ}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} a u v n_x \, d\gamma}_{\text{condition limite ?}} = 0$$

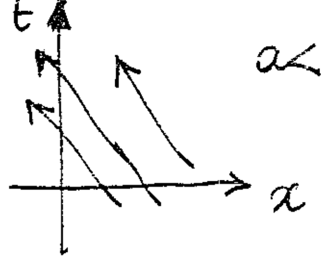
↳ difficulté de trouver une formulation variationnelle qui permette d'utiliser des résultats mathématiques puissants

→ Hyperbolicité du problème

* Approche heuristique du problème aux limites



$a > 0$.



$a < 0$.

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & t>0,\ x>0 & \\ u(x,0) = u_d(x) & t=0,\ x>0 & \\ u(0,t) = v_0(t) & t>0,\ x=0 & \to \text{cu limite.} \end{array}\right.$$

* $a>0$ se donner une condition limite permet de "calculer" complètement $u(x,t)$ en suivant les caractéristiques $\frac{dx}{dt}=a$.
→ caractéristique entrante

$a<0$ la donnée en $x=0$ n'est pas nécessaire ; la caractéristique en $(0,t)$ vient de l'intérieur du domaine et la condition initiale suffit

$a=0$ frontière caractéristique.

- Equations d'Euler linéarisées à une dimension.

$$p = p_0 + c_0^2 \rho' + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 s'$$

$$u = u_0 + u'$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \dfrac{\partial u'}{\partial x} = 0 \\[2mm]
\dfrac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho_0}\left(c_0^2 \dfrac{\partial \rho'}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial p}{\partial s}\right)_0 \dfrac{\partial s'}{\partial x}\right) = 0 \\[2mm]
\dfrac{\partial s'}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial s'}{\partial x} = 0
\end{array}\right.$$

Passer dans un jeu de variables qui fait apparaître des équations d'advection découplées
→ variables caractéristiques

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\rho_0 c_0^2}\left(p' - \rho_0 c_0 u'\right)$$

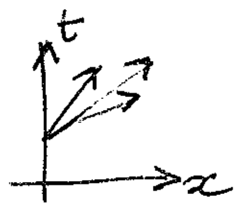
$$\varphi_2 = -\frac{1}{c_0^2}\, s'$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2\rho_0 c_0^2}\left(p' + \rho_0 c_0 u'\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \begin{pmatrix} u_0 - c_0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 + c_0 \end{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

- Discussion.

* $u_0 > c_0$ entrée supersonique

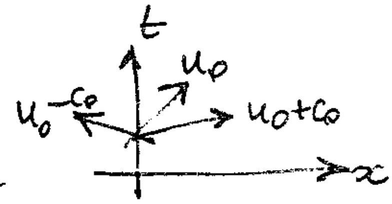


Mais conditions à se donner

i.e. $\varphi = \varphi_0$ ou

$(\rho', u', p') =$ donné

* $0 < u_0 < c_0$ entrée subsonique



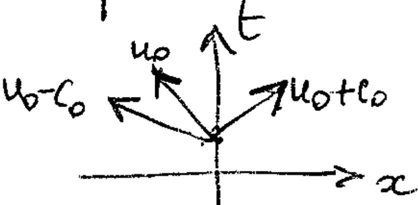
Avoir des conditions telles que les variables caractéristiques φ_2 et φ_3 sont calculées à l'aide des données aux limites et la variable caractéristique φ_1 est calculée à partir des valeurs dans le champ fluide.

→ 2 conditions aux limites à donner.

Par exemple s' et $p' + \rho_0 c_0 u'$

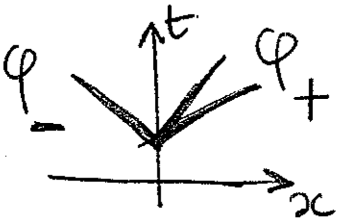
* $-c_0 < u_0 < 0$ sortie subsonique

Au Comme précédemment,
1 seule condition $p' =$ donné



→ calcul de φ_1 et φ_2 à l'aide des valeurs du champ ; calcul de φ_3 à l'aide de φ_1 φ_2 et la c.limite

• Condition limite générale (Kreiss, 1970).



$$\varphi_+ = S\varphi_- + g$$

(φ_+ :) caractéristiques entrantes (φ_- :) caractéristiques sortantes

S = opérateur de réflexion
g = donnée de Dirichlet (cf discussion ci-dessus).

• Equations d'Euler multidimensionnelles

faire l'analyse qui précède dans la direction de la normale.

* $u \cdot n = 0$ sur une paroi permet de poser "correctement" le problème de cette interaction
* Phénoménologie pour une frontière fluide (cf tuyères)

- Navier Stokes compressibles linéarisées monodimensionnelles. (Gustafsson 1972?)

* Système incomplètement parabolique

$$w_t = A w_x + B w_{xx} \qquad \begin{cases} A \text{ symétrique} \\ B_{11} \text{ défini} \geq 0 \end{cases}$$

$$w = {}^t(\rho, u, v, e).$$

$$w_t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} w_x + \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w_{xx}.$$

* Condition limite en $x=0$

$$R w_x + S w = 0.$$

Méthode de l'énergie (formulation variationnelle!)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 = \int_0^\infty dx \; w(Aw_x + B w_{xx})\, dx$$

$$= -\underbrace{\left[(w, Aw)\frac{1}{2} + (w, Bw_x)\right]_{x=0}}_{\text{assurer que c'est } \geq 0} - \underbrace{\int_0^\infty (w_x, Bw_x)\,dx}_{\leq 0}$$

alors $\|w(t)\|$ décroît $\rightarrow$ Stabilité de la condition limite.

* Décompte r = rang de B_{11}

p = nb de valeurs propres ≥ 0 de A_{22}

m = nb de conditions aux limites

$m = r + p$.

* Discussion : cas bidimensionnel ($w \in \mathbb{R}^4$)

$$\begin{cases} u \geq 0 & \text{entrée : 4 conditions} \\ u \leq 0 & \text{sortie : 3 conditions} \end{cases}$$

5) Limite incompressible

- fluide barotrope, disons isentropique

$$(C)\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} u + u \nabla \rho = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \dfrac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta u = f + \left(\dfrac{\kappa}{\rho} + \dfrac{\nu}{3}\right) \nabla (\operatorname{div} u) \end{cases}$$

- Deux limites à ne pas confondre

* Acoustique : petites perturbations autour d'un champ de vitesse nul.

$$p - p_0 = c_0^2 (\rho - \rho_0)$$

* limite incompressible $\rho \simeq \text{cte}\ \rho_0$ ou $\dfrac{u}{c_0} \to 0$

(R) On voit bien la singularité sur l'équation de la pression ; $p - p_0 = \underset{\swarrow \atop \infty}{c_0^2} \underbrace{(\rho - \rho_0)}_{\downarrow \atop 0}$

- Contrainte sur le champ de vitesse.

hyp: $\frac{\partial \rho}{\partial t} \to 0$, $\nabla \rho \to 0$.

$$\operatorname{div} u = -\underset{\underset{\frac{1}{\rho_0}}{\downarrow}}{\frac{1}{\rho}} \Big(\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underset{\underset{\text{finie}}{\downarrow}}{u} \; \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\nabla \rho} \Big) \quad \to 0$$

- Nouveau jeu d'équations

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \nu \Delta u = f . \end{array} \right.$$

pb: la pression n'est <u>plus</u> donnée par la loi du fluide barotrope (limite singulière) mais est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte "div u = 0"
(cf problème de Stokes)

(Q) Quid du passage mathématiquement rigoureux de (C) à (I) et surtout des solutions de (C) relativement aux solutions de (I) ?
Pb essentiellement ouvert à ma connaissance.

Dubois
Versailles, sept 95