Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de “Mathématiques du Signal Déterministe”

Examen du 10 février 2015 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou transmises via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$, $f(t) = 3\,t^2 - 2\,t^3$ si $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 1$ si $t > 1$.

a) Dessiner rapidement le graphe de la fonction f. Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On regardera en particulier le cas des points $t = 0$ et $t = 1$.

b) Reprendre toute la question précédente en s'intéressant cette fois à la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. En particulier, on répondra avec précision à la question de savoir si $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ est dérivable en $t = 0$ et en $t = 1$.

c) Quelle est la dérivée f'' au sens des distributions de la fonction $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$? Montrer que c'est une fonction discontinue en deux points que l'on précisera.

d) Calculer la dérivée troisième f''' de la fonction f au sens des distributions. Expliquer pourquoi ce n'est pas une fonction.

Exercice 2) Intégrale double

a) On se donne un nombre réel β. Pour quelles valeurs de β l'intégrale $I(\beta) = \int_0^1 \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ définit-elle un nombre réel ? Calculer le nombre $I(\beta)$ dans un tel cas.

- Dans la suite de l'exercice, on considère le disque $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ et on se donne un nombre α. On pose aussi $f(x, y) = \frac{x^2\, y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

b) En passant en coordonnées polaires ($x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$), montrer qu'on a la majoration $|\,f(x,\, y)\,| \leq g(r)$, avec $g(r) = \frac{1}{r^{2\,\alpha-4}}$.

c) A l'aide du théorème de Tonnelli et en passant en coordonnées polaires, montrer que l'intégrale double de la fonction g sur le disque D est finie si et seulement si $\alpha < 3$.

d) Sous la condition précédente, calculer l'intégrale double $\int\int_D f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. On pourra remarquer (après l'avoir justifié !) que $\int_0^{2\,\pi} \sin^2\theta\ \cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3) Equation différentielle

a) Calculer les valeurs $u_1(t)$ de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ u_1 solution de l'équation différentielle

(1) $$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}t^2} + u_1(t) = 0\,,$$

pour tout nombre réel t et satisfaisant aux conditions initiales

(2) $$u_1(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}(0) = 1\,.$$

b) Même question avec u_2 solution de l'équation différentielle

(3) $$\frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}t^2} + u_2(t) = 1$$

associée aux conditions initiales (2). On pourra remarquer que l'équation (3) admet une solution particulière constante.

c) Montrer que la fonction u_3 définie par $u_3(t) = u_1(t)$ si t est strictement négatif et par $u_3(t) = u_2(t)$ si t est positif ou nul, est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

d) La fonction u_3 est-elle continue ? Est-elle dérivable ? On s'intéressera essentiellement à ce qui se passe autour du point $t = 0$.

Exercice 4) Transformation de Fourier

On note P_T la fonction porte : $P_T(t) = 1$ si $|\,t\,| \leq \frac{T}{2}$, $P_T(t) = 0$ si $|\,t\,| > \frac{T}{2}$. On note f le produit de convolution $f = P_T * P_T$.

a) Rappeler l'expression de la transformée de Fourier $\widehat{P_T}(\omega)$ de la porte P_T.

b) Montrer que la fonction f admet l'expression suivante : $f(t) = T - |\,t\,|$ si $|\,t\,| \leq T$, $f(t) = 0$ si $|\,t\,| > T$. Représenter graphiquement la fonction f.

c) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ de la fonction f. Appartient-elle à l'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables ?

d) On désigne par sinc la fonction sinus cardinal : $\mathrm{sinc}(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$. Calculer en fonction de t les valeurs de l'intégrale $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega T}{2}\big)\big)^2 \exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega$. En déduire une expression analytique de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathrm{sinc}(\theta)\big)^2\,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 5) Signaux discrets et transformée en z

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et le signal discret $h \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\,\delta_{ka}$ tel que

(4) $$h = \frac{1}{2}\,\delta_{2a} + \frac{1}{4}\,\delta_{4a} + \cdots + \frac{1}{2^k}\,\delta_{2k\,a} + \ldots\,.$$

a) Que vaut le coefficient h_k en fonction de l'entier k ?

b) Montrer que le signal h est causal et appartient à l'espace ℓ^1_a. Que vaut $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\,h_k\,|$?

c) On introduit la transformée en z, notée $H(z)$, du signal h défini en (4). Pour quelles valeurs du nombre complexe z cette fonction est-elle *a priori* définie ? Calculer l'expression analytique de $H(z)$ dans ce cas. Préciser ses pôles, c'est à dire les valeurs du nombre complexe z qui annulent le dénominateur de $H(z)$.

d) On introduit le filtre T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,\delta_{ka}$ associe le signal discret $y = h * x$. Le filtre T est-il causal ? Est-il stable ? Justifier avec soin votre réponse.