MAA107 - Mathématiques du Signal Déterministe

Examen seconde session, 09 avril 2019

Enseignant responsable :
François Dubois

Durée 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Documents autorisés :

notes de cours personnelles

et transmises lors des cours, sous forme papier,

les ouvrages

"Aide mémoire de mathématiques de l'ingénieur" (M. Chossat) et "Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace" (A. Lesfari),

à l'exclusion de tout autre document.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours de “Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal”

Examen du 09 avril 2019 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l’épreuve via le site internet du cours sont autorisées, ainsi que les deux ouvrages mentionnés dans la page de garde, à l’exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Espaces de fonctions

On rappelle que l’espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l’espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, l’espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ celui des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions de l’espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ sont bornées. On se donne un nombre réel α et on pose $f_\alpha(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ si $t \geq 1$ et $f_\alpha(t) = 0$ si $t < 1$.

a) Quel est l’ensemble de définition de la fonction f_α ?

b) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l’espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$?

c) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l’espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$?

d) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l’espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

Exercice 2) Transformation de Fourier

On pose $\varphi(t) = \exp(-t)$ si $t > 0$ et $\varphi(t) = 0$ si $t \leq 0$.

a) Rappeler pourquoi la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer les valeurs $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de cette fonction.

c) Montrer que le produit de convolution $f = \varphi * \varphi$ est une fonction causale, c’est à dire que $f(t) = 0$ si $t < 0$.

d) Calculer les valeurs $f(t)$ de ce produit de convolution pour tout nombre réel t.

e) Calculer les valeurs $\widehat{f}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de ce produit de convolution.

f) En déduire les valeurs des intégrales $I(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\,\omega\,t)}{(1+i\,\omega)^2}\,\mathrm{d}\omega$ pour tout nombre réel t.

Exercice 3) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$, $f(t) = t\,(1-t)$ si $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 1$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est continue en $t = 0$ et $t = 1$.

c) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf en certains points que l'on précisera.

d) Calculer la dérivée de f au sens classique.

e) Dessiner le graphe de la fonction dérivée de la fonction f.

f) Quelle est la dérivée de f au sens des distributions ?

g) Calculer la dérivée seconde de f au sens des distributions.

h) Cette distribution peut-elle être représentée par une fonction ?

Exercice 4) Signaux discrets et transformée en z

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$; la notation δ_{na} désigne la masse de Dirac au point na. Un signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\,\delta_{na}$ se transforme sous l'action d'un filtre T en un signal discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\,\delta_{na}$ de sorte que $y_n = x_n + \frac{1}{2}\,x_{n-1} + \frac{1}{3}\,x_{n-2} + \frac{1}{4}\,x_{n-3}$.

a) Ce filtre est-il causal ?

b) Calculer sa réponse impulsionnelle h.

c) Ce filtre est-il stable ?

d) Calculer sa fonction de transfert H.

e) Pour quelles valeurs de z la fonction $H(z)$ est-elle définie ?

f) Quel commentaire pouvez-vous faire ?