le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours de “Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal” (MAA107)

Examen du 30 janvier 2018 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Espaces de fonctions

On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^1(0,\,1)$ est l'espace des fonctions intégrables sur l'intervalle $]0,\,1[$, l'espace $\mathrm{L}^2(0,\,1)$ celui des fonctions de carré intégrable sur $]0,\,1[$ et que les fonctions de l'espace $\mathrm{L}^\infty(0,\,1)$ sont bornées. On se donne un nombre réel α et on pose $f_\alpha(t) = \left(\dfrac{1}{t}\right)^\alpha$ pour $0 < t < 1$.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f_α ?

b) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^\infty(0,\,1)$?

c) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^1(0,\,1)$?

d) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^2(0,\,1)$?

Exercice 2) Equations différentielles ordinaires

a) Quelle est la solution générale de l'équation différentielle (1) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 4\,u(t) = 0$?

b) Quelle est la solution de l'équation différentielle (1) associée à la condition initiale (2) $u(0) = 1$?

c) Chercher une solution particulière de l'équation différentielle (3) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 4\,u(t) = t$ sous la forme d'un polynôme de degré 1.

d) Quelle est la solution de l'équation différentielle (3) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 4\,u(t) = t$ associée à la condition initiale (2) ?

e) Quelle est la solution de l'équation différentielle (4) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 4\,u(t) = t^2$ associée à la condition initiale (2) ?

Exercice 3) Transformation de Fourier

On pose $\varphi(t) = \exp(-t)$ si $t > 0$ et $\varphi(t) = 0$ sinon.

a) Rappeler pourquoi la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer les valeurs $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de cette fonction.

c) Montrer que le produit de convolution $f = \varphi * \varphi$ est une fonction causale.

d) Calculer les valeurs $f(t)$ de ce produit de convolution pour tout nombre réel t.

e) Calculer les valeurs $\widehat{f}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de ce produit de convolution.

f) En déduire les valeurs des intégrales $I(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + i\,\omega))^2} \exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega$ pour tout nombre réel t.

Exercice 4) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < -\pi$, $f(t) = \sin t$ si $-\pi \leq t \leq \pi$ et $f(t) = 0$ si $t > \pi$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf en certains points que l'on précisera.

d) Calculer la dérivée de f au sens des distributions.

e) Calculer la dérivée seconde de f au sens des distributions. Est-ce une fonction ?

Exercice 5) Signaux discrets et transformée en z

Pour un nombre réel α arbitraire, δ_α représente la masse de Dirac au point α. Par ailleurs, a est un nombre réel fixé strictement positif. On introduit le filtre T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,\delta_{ka}$ associe le signal discret $y = T\,x$, $y \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k\,\delta_{ka}$ avec

$$(1) \qquad y_k = \frac{3}{2\,a}\,x_k - \frac{2}{a}\,x_{k-1} + \frac{1}{2\,a}\,x_{k-2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

a) Le filtre T est-il causal ?

b) Quelle est la réponse impulsionnelle $h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\,\delta_{ka}$ du filtre T ?

c) Calculer la transformée en z $H(z)$ de la réponse impulsionnelle h introduite à la question précédente.

d) On introduit les tranformées en z $X(z)$ et $Y(z)$ des signaux x et y tels que $y = T\,x$. Calculer $Y(z)$ en fonction de $X(z)$. Que vaut le rapport $Y(z)/X(z)$? Pouvait-on prévoir le résultat ?

e) Le filtre T est-il stable ?