le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours de “Mathématiques du Signal Déterministe” (MAA107)

Examen du 31 janvier 2017 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Espaces de fonctions

On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ celui des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions de l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ sont bornées. On se donne un nombre réel α et on pose $f_\alpha(t) = \left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)^\alpha$.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f_α ?

b) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$?

c) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$?

d) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

Exercice 2) Equations différentielles ordinaires

a) Quelle est la solution générale de l'équation différentielle (1) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$?

b) Quelle est la solution de l'équation différentielle (1) associée à la condition initiale (2) $u(0) = 2$?

c) Quelle est la solution de l'équation différentielle (3) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 2$ associée à la condition initiale (2) ?

d) Quelle est la solution de l'équation différentielle (4) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = \sin(t)$ associée à la condition initiale (2) ?

Exercice 3) Transformation de Fourier

On pose $\varphi(t) = \exp(-|t|)$.

a) Rappeler pourquoi la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer les valeurs $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de cette fonction.

c) Montrer que le produit de convolution $f = \varphi * \varphi$ est une fonction paire.

d) Calculer les valeurs $f(t)$ de ce produit de convolution pour tout nombre réel t.

e) Calculer les valeurs $\widehat{f}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de ce produit de convolution.

f) En déduire les valeurs des intégrales $I(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega\, t)}{(1+\omega^2)^2}\,\mathrm{d}\omega$ pour tout nombre réel t.

Exercice 4) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$, $f(t) = t\,(1-t)$ si $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 1$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf en certains points que l'on précisera.

d) Calculer la dérivée de f au sens des distributions.

e) Calculer la dérivée seconde de f au sens des distributions. Est-ce une fonction ?

Exercice 5) Signal discret

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et un signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{na}$ que l'on suppose borné : il existe un nombre positif ou nul $||x||_\infty$ qui dépend de x tel que pour tout entier n, $|x_n| \leq ||x||_\infty$.

a) Montrer que pour tout entier n, le nombre $y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, x_{n-k}$ c'est à dire

$$y_n = x_n + \tfrac{1}{2}\, x_{n-1} + \tfrac{1}{4}\, x_{n-2} + \dots + \tfrac{1}{2^k}\, x_{n-k} + \dots \qquad \text{est bien défini.}$$

b) On désigne par y le signal discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, \delta_{na}$ avec y_n défini au point précédent. Montrer qu'on a la relation (1) $y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{2}\, y_n$.

c) On appelle T le filtre qui à tout signal borné x associe le signal y défini ci-dessus. Ce filtre est-il causal ?

d) Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T ? On pourra introduire les transformées en z $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \frac{1}{z^n}$ et $Y(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, \frac{1}{z^n}$ des signaux d'entrée x et de sortie y du filtre T et utiliser la relation (1).

e) Quelle est la réponse impulsionnelle $h = T\,\delta$ du filtre T ?

f) Démontrer que le filtre T est stable.