le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 1 Remise en forme

- Fonction exponentielle

Elle est définie dans un premier temps comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et satisfait aux conditions $\exp(0) = 1$ et $\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$ pour tous les nombres réels x et y.
De plus, $\exp(x) > 0$ pour tout nombre réel x.
La fonction exponentielle est étendue au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. En particulier, pour deux nombres complexes z et z' arbitraires : $\exp(z+z') = \exp(z)\,\exp(z')$.

- Trigonométrie

Les formules d'Euler relient l'exponentielle complexe et les fonctions circulaires sinus et cosinus : $\exp(i\,\theta) \equiv \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$. Alors la relation $\exp\big(i\,(\theta+\varphi)\big) = \exp(i\,\theta)\,\exp(i\,\varphi)$ peut se lire sur les fonctions trigonométriques : $\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\,\cos(\varphi) - \sin(\theta)\,\sin(\varphi)$ et $\sin(\theta+\varphi) = \sin(\theta)\,\cos(\varphi) + \cos(\theta)\,\sin(\varphi)$.
On a aussi la relation fondamentale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour tout nombre θ.

- Dérivation des fonctions composées

Si $y = f(x)$ définit une première application dérivable de la variable réelle x et $z = g(y)$ une seconde application dérivable, on peut composer ces deux fonctions : $z = g\big(f(x)\big) \equiv \big(g_\circ f\big)(x)$.
Alors la fonction composée $g_\circ f$ est dérivable et $(g_\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\,f'(x)$. On écrit en pratique cette relation sous la forme $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

- Dérivée de la fonction exponentielle

On admet que la fonction exponentielle est dérivable et qu'on a en particulier $\exp'(0) = 1$. On peut alors établir une relation fondamentale $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(x)\big) = \exp(x)$: la fonction exponentielle est sa propre dérivée.

- Dérivée des fonctions circulaires

Par composition des dérivées, on a aussi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(a\,x)\big) = a\,\exp(a\,x)$. Si on applique ce résultat avec $a = i$, on en déduit les dérivées des fonctions circulaires : $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

- Dérivation de la fonction réciproque

On se donne une fonction $y = f(x)$ définie sur un intervalle. On suppose f bijective : pour tout y, il existe un unique x de sorte que $f(x) = y$. L'application qui à y associe cet unique x est appelée fonction réciproque de f ; elle est notée $x = \big(f^{-1}\big)(y)$. On suppose de plus la fonction f dérivable, avec $f'(x)$ qui ne s'annule jamais. Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable et on a $\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1})(y)} = \frac{1}{f'(x)}$. On écrit aussi cette relation sous la forme : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.
La fonction réciproque de la fonction exponentielle s'appelle le logarithme. Nous le notons log.
On a alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\log(x)\big) = \frac{1}{x}$ si x est un nombre réel strictement positif.

François Dubois, septembre 2017.

• Théorème fondamental de l'Analyse

On se donne une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction qui, à tout nombre réel x, associe l'intégrale $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\big) = f(x)$.
On déduit de cette relation le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive F de f. Avec $F' \equiv f$, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. En particulier, $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

• Intégration par parties

On utilise la relation précédente avec $f(x) \equiv u(x)\,v(x)$. La règle de Leiniz de dérivation d'un produit s'écrit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(u(x)\,v(x)\big) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,v(x) + u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. On en déduit la formule d'intégration par parties : $\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$.

• Une propriété des intervalles.

On se donne un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$. Typiquement, $I =]a, b[$ avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. On considère une fonction f définie sur I et dérivable en tout point de l'intervalle I. On suppose de plus que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction f est constante : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $f(x) = C$.
On note que si f est définie sur un ensemble plus compliqué qu'un intervalle, comme par exemple la réunion de deux intervalles disjoints, alors l'annulation de la dérivée de f en tout point n'entraîne pas le fait que la fonction f est une constante ; elle est simplement constante dans chaque intervalle qui compose l'ensemble où elle est définie.

• Intégrales impropres classiques

On se donne un nombre réel α. L'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ peut être définie comme la limite de l'intégrale $\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ si A tend vers l'infini si et seulement si $\alpha > 1$. On dit dans ce cas que l'intégrale impropre converge et on a $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$. Si $\alpha \leq 1$, la limite de $\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ vaut $+\infty$ si A tend vers l'infini et on dit que l'intégrale impropre diverge.
De façon analogue, l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ peut être définie comme la limite de l'intégrale $\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ si ε tend vers zéro. Cette limite existe et est un nombre réel si et seulement si $\alpha < 1$ et dans ce cas, l'intégrale converge et $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$. Dans le cas $\alpha \geq 1$, $\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ tend vers $+\infty$ si le paramètre ε tend vers zéro et l'intégrale diverge.

• Equation différentielle linéaire homogène

On se donne deux nombres réels a et u_0. On cherche une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'on a d'une part l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\,u(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et d'autre part la condition initiale $u(0) = u_0$. Alors la fonction u existe, est unique et est donnée par l'expression $u(t) = \exp(-a\,t)\,u_0$.

• Formule de Duhamel

Toutes choses égales par ailleurs, on se donne aussi une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose maintenant que la fonction u satisfait une équation d'évolution avec une source égale à la fonction f : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\,u(t) = f(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors la fonction u existe, est unique et peut se calculer avec la formule de Duhamel : $u(t) = \exp(-a\,t)\,u_0 + \int_0^t \exp\big(-a(t-\theta)\big)\,f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.