le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 5 Intégrale double

- Introduction

On se donne une partie bornée Ω du plan $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale double de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui, quand il existe, se note $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ ou parfois $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ et souvent plus simplement $\int_\Omega f\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ ou même $\int_\Omega f$.

- Intégrale double de la fonction "un"

Si on prend le rectangle $]a, b[\times]c, d[$ du plan $\mathbb{R}^2$ (avec $a < b$ et $c < d$), l'intégrale double de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est simplement la surface $(b-a)\,(d-c)$ du rectangle :
$\int_{]a,b[\times]c,d[} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = (b-a)\,(d-c)$.
De façon générale, si Ω désigne une partie bornée du plan, l'intégrale double sur Ω de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est la surface $|\Omega|$ du domaine : $\int_\Omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = |\Omega|$.

- Linéarité

On suppose connue l'intégrale double $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ et on se donne un nombre λ. Alors $\int_\Omega (\lambda\, f)(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lambda\, \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Si on se donne aussi l'intégrale double $\int_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ de la fonction g, alors $\int_\Omega (f+g)(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

- Positivité

On suppose la fonction f positive sur Ω: $f(x, y) \geq 0,\ \forall\,(x, y) \in \Omega$. Alors $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \geq 0$.
Si $f \leq g$ sur Ω c'est à dire $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$, alors
$\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \int_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ [exercice].

- Additivité par rapport au domaine

On suppose l'ensemble Ω décomposé en une réunion finie de parties Ω_i "plus simples", $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ de sorte que l'intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$ est de surface nulle si $i \neq j$: $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$.
Alors l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i:
$\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

- Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω comme ci-dessus et une fonction f "étagée" sur Ω, c'est à dire constante sur chacune des parties Ω_i: $\forall i,\ \exists \lambda_i,\ \forall\,(x, y) \in \Omega_i,\ f(x, y) = \lambda_i$. Le calcul de l'intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^N \lambda_i\, |\Omega_i|$.

- Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et par $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu'au bord inclus :
$\forall X \in \Omega,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall Y \in \Omega,\ |X-Y| < \eta \Longrightarrow |f(X) - f(Y)| < \varepsilon$. Alors l'intégrale de f sur Ω est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe.

François Dubois, novembre 2017.

Pour établir ce résultat, on utilise l'uniforme continuité de f et on l'approche par des fonctions étagées. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_ε étagée sur Ω de sorte que $f_\varepsilon - \varepsilon \le f \le f_\varepsilon + \varepsilon$ sur Ω. Alors le nombre $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ satisfait nécessairement aux inégalités
$\int_\Omega f_\varepsilon(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \varepsilon\, |\Omega| \;\le\; \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \;\le\; \int_\Omega f_\varepsilon(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \varepsilon\, |\Omega|$.
On montre alors d'une part que le nombre $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est bien défini et d'autre part qu'on peut l'approcher en calculant l'intégrale d'une fonction en escalier qui approche la fonction f.

- Intégrale d'une fonction positive

On se donne $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et f fonction positive $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$: $f(x, y) \ge 0$ pour $(x, y) \in \Omega$. L'intégrale $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est dans ce cas toujours bien définie, quitte à accepter la valeur $+\infty$. Par exemple pour $f(x, y) \equiv 1$ et $\Omega = \mathbb{R}^2$, on a $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = +\infty$. Si l'intégrale n'est pas infinie, si c'est un nombre réel positif, on écrit cette propriété sous la forme $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty$.

- Théorème de Tonnelli

On se donne une fonction positive f définie dans $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles. Notons qu'on peut toujours se ramener à ce cas si f est définie de Ω dans $\mathbb{R}$ en supposant f nulle hors de Ω. Pour x réel fixé on note $F(x) = \int_\mathbb{R} f(x, y)\, \mathrm{d}y$ le nombre positif éventuellement égal à $+\infty$ obtenu en intégrant la fonction f par raport à la seconde variable y, en laissant la première fixée. De même, on note $G(y) = \int_\mathbb{R} f(x, y)\, \mathrm{d}x$ le nombre positif au besoin égal à $+\infty$ si l'intégrale diverge, résultat de l'intégrale de la fonction f par raport à la première variable x en laissant la deuxième fixe. Alors les intégrales de F et G sont égales et permettent de calculer l'intégrale double de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$: $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} F(x)\, \mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} G(y)\, \mathrm{d}y$.
En explicitant les valeurs des fonctions F et G, la conclusion du théorème de Tonnelli s'écrit souvent sous la forme $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x \big[\int_\mathbb{R} f(x, y)\, \mathrm{d}y \big] = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}y \big[\int_\mathbb{R} f(x, y)\, \mathrm{d}x \big]$. On peut toujours intégrer une fonction positive de deux variables dans l'ordre que l'on veut.
La relation précédente montre que si l'une des deux intégrales simples $\int_\mathbb{R} F(x)\, \mathrm{d}x$ ou $\int_\mathbb{R} G(y)\, \mathrm{d}y$ est infinie, il en est de même de l'intégrale double qui est alors infinie. Si l'une des intégrales $\int_\mathbb{R} F(x)\, \mathrm{d}x$ ou $\int_\mathbb{R} G(y)\, \mathrm{d}y$ est finie, alors c'est aussi le cas pour l'intégrale double $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. On écrit alors $0 \le \iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty$.

- Exemple d'utilisation du théorème de Tonnelli

On peut par exemple vérifier la conclusion du thérème de Tonnelli en considérant la fonction f égale à 1 dans le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1\}$ et égale à 0 ailleurs. Les deux calculs précédents de l'intégrale double de f sur $\mathbb{R}^2$ redonnent la surface $|D|$ du demi-disque D, à savoir $\frac{\pi}{2}$.

- Théorème de Fubini

On se donne maintenant une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles ou éventuellement complexes. On suppose que l'intégrale double de la fonction positive $|f|$ est finie :
$\iint_\Omega |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty$. Alors l'intégrale double de f sur $\mathbb{R}^2$ est bien définie ; c'est un nombre réel ou complexe que l'on peut calculer à l'aide d'une des relations suivantes :
$\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x \big[\int_\mathbb{R} \mathrm{d}y\, f(x, y) \big]$ ou $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}y \big[\int_\mathbb{R} \mathrm{d}x\, f(x, y) \big]$. Si l'intégrale double est bien définie, c'est à dire si $\iint_\Omega |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est finie, on peut toujours intégrer une fonction de deux variables dans l'ordre que l'on veut.

- Exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On se donne deux réels a et b strictement positifs et le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$. On pose $f(x, y) = x - y$. On vérifie d'abord que l'intégrale de la fonction $|f|$ sur le triangle T est finie puisque $|f(x, y)| \leq a + b$ si $(x, y) \in T$. Donc $\int_T |f(x, y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leq (a+b) \, |T| = (a+b) \, \frac{ab}{2} < \infty$ et on on est dans le cadre des hypothèses du théorème de Fubini. On peut vérifier sur cet exemple [exercice !] que les deux intégrales simples successives $\int_0^a \mathrm{d}x \big[\int_0^{b(1-x/a)} \mathrm{d}y \, (x-y) \big]$ et $\int_0^b \mathrm{d}y \big[\int_0^{a(1-y/b)} \mathrm{d}x \, (x-y) \big]$ sont égales et valent $\frac{ab}{6} \, (b-a)$.

- Changement de variable dans une intégrale double

On se donne une tranformation régulière et bijective F d'une partie $\widehat{\Omega}$ "assez simple géométriquement" vers le domaine d'intégration Ω :
$\widehat{\Omega} \ni (\widehat{x}, \widehat{y}) \longmapsto F(\widehat{x}, \widehat{y}) \equiv (x = X(\widehat{x}, \widehat{y}), y = Y(\widehat{x}, \widehat{y})) \in \Omega$. La régularité des fonctions X et Y permet de considérer les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y})$, $\frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y})$, $\frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y})$ et $\frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y})$ qui sont aussi des fonctions définies sur $\widehat{\Omega}$. On forme la matrice jacobienne $J(F)(\widehat{x}, \widehat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}} \\ \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} \end{pmatrix}$, son déterminant $\det(J(F)) = \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}} \frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}} \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}$ et la valeur absolue $|\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y})$ de ce déterminant. Alors l'intégrale d'une fonction f sur Ω peut se calculer à l'aide d'une intégrale sur le domaine des paramètres : $\int_\Omega f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\widehat{\Omega}} f(X(\widehat{x}, \widehat{y}), Y(\widehat{x}, \widehat{y})) \, |\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y}) \, \mathrm{d}\widehat{x} \, \mathrm{d}\widehat{y}$.
Dans la relation précédente, il est essentiel de ne pas oublier la valeur absolue du déterminant jacobien, c'est à dire le facteur $|\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y})$.

- Coordonnées polaires du plan

Dans ce cas, le domaine $\widehat{\Omega}$ est noté classiquement avec les variables (r, θ) et le changement de coordonnées F s'écrit simplement $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Après transformation de $\widehat{\Omega}$ en Ω par ce passage en coordonnées polaires, on forme le déterminant jocobien $J(r, \theta) \equiv \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} = r$ et on a $\int_\Omega f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\widehat{\Omega}} f(r\cos\theta, y = r\sin\theta) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$.

- Introduction à l'intégration par parties

La question est de généraliser aux intégrales doubles la relation $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = f(b) - f(a)$ toujours vraie pour les intégrales simples dès que f est dérivable et en particulier pour $a < b$. Il faut voir cette relation comme une intégrale sur le bord $\partial(]a, b[) = \{a, b\}$ de l'intervalle $]a, b[$. On peut noter $n_b \equiv +1$ la "normale extérieure" à l'intervalle $]a, b[$ au point b et $n_a \equiv -1$ la normale extérieure à cet intervalle au point a. La relation précédente s'écrit aussi
$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = n_a f(a) + n_b f(b)$.

- Frontière

Si Ω est un domaine borné du plan $\mathbb{R}^2$, on suppose sa frontière $\partial\Omega$ assez régulière. La notion de bord, de frontière est assez intuitive. Par exemple, si Ω est le disque de centre l'origine et de rayon R, sa frontière est le cercle de centre O et de même rayon. On paramètre cette courbe $\partial\Omega$ avec des coordonnées cartésiennes : $x = X(t)$, $y = Y(t)$, avec $0 \leq t \leq 1$ pour fixer les idées.

- Normale extérieure

La normale extérieure à un domaine borné Ω du plan est un vecteur unitaire $n(x, y)$ défini, si le bord $\partial\Omega$ est assez régulier, pour tout point $(x, y) \in \partial\Omega$. Ce vecteur $n(x, y) \equiv (n_x(x, y), n_y(x, y))$ est perpendiculaire à la direction tangente à la courbe. Avec un paramétrage $x = X(t)$, $y = Y(t)$ de $\partial\Omega$ comme plus haut, on a $n_x \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + n_y \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = 0$ en tout point du contour. De plus, la normale $n(x, y)$ est unitaire : $n_x(x, y)^2 + n_y(x, y)^2 \equiv 1$, pour tout $(x, y) \in \partial\Omega$. Enfin, elle pointe vers l'extérieur de Ω.
Dans le cas du disque de centre l'origine et de rayon R, la normale $n(x, y)$ au point $(x, y) = (R\cos\theta, R\sin\theta) \in \partial\Omega$ sur le bord s'écrit $n(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

- Inégrale de contour

On peut intégrer une fonction f définie sur une courbe Γ. Afin de garantir que l'intégrale de la fonction "un" sur la courbe Γ est égale à la longueur $|\Gamma|$ de cette courbe, on introduit l'abscisse curviligne γ telle que $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\big(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\big)^2 + \big(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\big)^2}$ et on pose

$$\int_\Gamma f(x, y)\,\mathrm{d}\gamma = \int_0^1 f(X(t), Y(t)) \sqrt{\Big(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \Big(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\Big)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas du cercle de centre O et de rayon R, si θ désigne l'angle polaire, on a $\mathrm{d}\gamma = R\,\mathrm{d}\theta$ et on peut finalement écrire $\int_\Gamma f(x, y)\,\mathrm{d}\gamma = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) R\,\mathrm{d}\theta$. On retrouve bien que si $f \equiv 1$, son intégrale sur Γ est la longueur du cercle.

- Intégration par parties

L'intégrale double dans le domaine Ω de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ d'une fonction f est égale à une intégrale sur le bord $\partial\Omega$ du domaine. De façon précise, on désigne par $n_j(x, y)$ la composante numéro j de la normale extérieure en un point (x, y) de la frontière. On a $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f(x, y)\, n_j(x, y)\,\mathrm{d}\gamma$. On peut détailler cette relation pour chacune des deux composantes : $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f(x, y)\, n_x(x, y)\,\mathrm{d}\gamma$ et $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f(x, y)\, n_y(x, y)\,\mathrm{d}\gamma$. Ces relations sont fondamentales. Entre autres pour de nombreuses applications en ingénierie.