le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 7 Transformation de Fourier

- Définition

On se donne une fonction intégrable $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$. Notons que sauf exception, on suppose la fonction f à valeurs complexes : $f(t) \in \mathbb{C}$. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est bien défini puisque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction f. On la note aussi $\mathscr{F} f$ et on a $(\mathscr{F} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

- Exemples fondamentaux

On se donne $a > 0$. L'exponentielle causale φ_a est définie par $\varphi_a(t) = H(t) \exp(-a\,t)$. C'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$: $\varphi_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\,\omega}$.
Pour $a > 0$, l'exponentielle causale symétrisée ψ_a s'écrit : $\psi_a(t) = \exp(-|a|\,t)$. C'est une fonction paire qui est identique à φ_a si $t \geq 0$. On a $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$. Nous retenons que $(\mathscr{F}(\exp(-a\,|t|)))(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$.
Pour $T > 0$, la porte P_T de largeur T satisfait aux contraintes suivantes : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq T/2$ et $P_T(t) = 0$ lorsque $t < -T/2$ ou $t > -T/2$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est bien entendu finie $[P_T \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})]$ et on a $\widehat{P}_T(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Sinus cardinal

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ nombre réel différent de zéro, on pose $\operatorname{sinc}\theta = \frac{\sin\theta}{\theta}$. On prolonge cette fonction par continuité en $\theta = 0$: $\operatorname{sinc} 0 = 0$. Alors $\widehat{P}_T(\omega) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Parité

On remarque que si f est paire, sa transformée de Fourier $\mathscr{F} f$ est paire également [exercice].

- Linéarité

Si les fonctions f et g sont intégrables, leur somme est aussi intégrable et on a $\mathscr{F}(f+g) = \mathscr{F} f + \mathscr{F} g$. Si λ est un nombre complexe arbitraire et $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a $\mathscr{F}(\lambda\, f) = \lambda\, \mathscr{F} f$.

- Transformée de Fourier d'un retard et retard de la transformée de Fourier

On se donne $a \in \mathbb{R}$. Alors $(\mathscr{F}(f(t-a)))(\omega) = \exp(-i\,a\,\omega)\,(\mathscr{F} f)(\omega)$. De façon analogue, si ω_0 est un réel arbitraire, $(\mathscr{F} f)(\omega - \omega_0) = (\mathscr{F}(\exp(i\,\omega_0\,t)\, f(t)))(\omega)$.

- Changement d'échelle

On se donne $a > 0$. Alors $(\mathscr{F}(f(a\,t)))(\omega) = \frac{1}{a}\,(\mathscr{F} f)\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

- Une condition suffisante de limite nulle à l'infini

On se donne une fonction f dérivable de sorte que f et sa dérivée f' appartiennent toutes deux à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty} (|f(t)| + |f'(t)|) \, \mathrm{d}t < \infty$. Alors la fonction f tend vers zéro à l'infini : $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$.

François Dubois, novembre 2017.

- Transformée de Fourier de la dérivée

Si la fonction f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $(\mathscr{F}(f'))(\omega) = i\,\omega\,(\mathscr{F} f)(\omega)$.

- Dérivée de la transformée de Fourier

On suppose que les fonctions f et $\mathbb{R} \ni t \longmapsto t\, f(t) \in \mathbb{C}$ appartiennent à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Alors la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction dérivable et on a $\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\omega} = -i\,(\mathscr{F}(t\, f(t)))(\omega)$.

- Transformée de Fourier d'un produit de convolution

On suppose que les fonctions f et g sont toutes deux intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors leur produit de convolution $f * g$ appartient également à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\mathscr{F}(f * g) = (\mathscr{F} f)\,(\mathscr{F} g)$. La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en un produit ordinaire.