le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 8 Transformation de Fourier (ii)

- Transformation de Fourier dans l'espace des fonctions intégrables

On se donne une fonction intégrable à valeurs complexes : $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$. On a vu à la leçon précédente que pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est bien défini puisque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. De plus, la transformée de Fourier $\mathscr{F} f(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ de la fonction f est définie par la fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est bornée

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, \mathrm{d}t$. En d'autres termes, $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers zéro à l'infini

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ tend vers zéro lorsque ω tend vers $+\infty$ ou ω tend vers $-\infty$.

Nous constatons que la propriété est vraie pour les trois exemples fondamentaux introduits lors de la leçon précédente, à savoir l'exponentielle causale $\varphi_a(t) = H(t)\exp(-a\,t)$, l'exponentielle causale symétrisée $\psi_a(t) = \exp(-a\,|t|)$ et la porte P_T égale à 1 si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et à zéro sinon [avec $a > 0$ et $T > 0$]. On a en effet $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\,\omega}$, $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$ et $\widehat{P}_T(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega\,T}{2}\big)$; ces trois fonctions tendent bien vers zéro si $|\omega|$ tend vers l'infini.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction continue

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction continue de l'argument ω. On a dans ce cas $\widehat{f} \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

On laisse le lecteur vérifier cette propriété pour les trois exemples fondamentaux rappelés ci-dessus.

- Opérateur de Fourier conjugué

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$ par l'expression $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$. Seul le signe de ω dans l'exponentielle complexe a changé. On a la relation $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = (\mathscr{F} f)(-\omega)$.

- Théorème d'inversion de Fourier (première formulation)

Si d'une part la fonction f est intégrable ($f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$) et si de plus sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable ($\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$), alors on peut représenter la fonction f à l'aide de l'opérateur de Fourier conjugué : $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\, \widehat{f}(\omega)\, \mathrm{d}\omega$ et cette égalité a lieu "pour presque tout" $t \in \mathbb{R}$ (pour tout réel t dans les applications en ingénierie). On peut écrire aussi $f(t) = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}\widehat{f})(t)$ ou $f(t) = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(t)$.

Seul le second exemple fondamental permet de tester ce théorème d'inversion de Fourier puisque les fonctions $\widehat{\varphi}_a$ et $\widehat{P}_T$ n'appartiennent pas à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice !]. On a par contre $\widehat{\psi}_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice] et le théorème d'inversion de Fourier s'écrit dans ce cas particulier

---

François Dubois, novembre 2017.

$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\,\frac{\mathrm{d}\omega}{a^2+\omega^2} \;=\; \frac{\pi}{a}\,\exp(-a\,|t|)$. On constate qu'on a calculé avec des fonctions élémentaires l'intégrale d'une fonction [ici $\exp(i\,\omega\,t)/(a^2+\omega^2)$] dont la primitive ne peut pas s'exprimer en termes de fonctions élémentaires.
L'égalité ponctuelle $f(t) = \frac{1}{2\pi}\,(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(t)$ peut s'écrire aussi $f(t) = \frac{1}{2\pi}\,\big((\overline{\mathscr{F}}_{\circ}\mathscr{F})f\big)(t)$ pour tout réel t, c'est à dire $\big((\overline{\mathscr{F}}_{\circ}\mathscr{F})f\big)(t) = 2\pi\,f(t)$. On en déduit donc une égalité entre fonctions $(\overline{\mathscr{F}}_{\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\,f$ pour toute fonction intégrable dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable.

- Inverse de l'opérateur de Fourier

On note dans ce paragraphe $\mathscr{E}$ l'espace des fonctions intégrables dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable. Alors l'égalité précédente $(\overline{\mathscr{F}}_{\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\,f$ est vraie pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$. On en déduit que l'opérateur $\overline{\mathscr{F}}_{\circ}\mathscr{F}$ transforme la fonction f en elle même, à un facteur 2π près. Si on appelle "identité" l'opérateur $\mathscr{E} \ni f \longmapsto \mathrm{id} f \;= f \in \mathscr{E}$, la relation $(\overline{\mathscr{F}}_{\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\,\mathrm{id} f$ valable pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$ peut aussi s'écrire comme une relation entre opérateurs de l'espace $\mathscr{E}$: $\overline{\mathscr{F}}_{\circ}\mathscr{F} = 2\pi\,\mathrm{id}$. Quand on compose les opérateurs $\mathscr{F}$ et $\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$, on trouve l'identité : $\big(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\big)_{\circ}\mathscr{F} \;= \mathrm{id}$. On peut montrer [exercice !] qu'on a aussi $\mathscr{F}_{\circ}\big(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\big) \;= \mathrm{id}$. En d'autres termes, $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la transformée de Fourier est égal à l'opérateur de Fourier conjugué !

- Approximation des fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Si on se donne une fonction de carré intégrable ($f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$), elle n'est pas en général intégrable sur $\mathbb{R}$. Mais si on la tronque en posant pour k entier positif, $f_k = P_{2k}\,f$, c'est à dire $f_k(t) = f(t)$ si $|t| \leq k$ et $f_k = 0$ sinon, on obtient une suite de fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Cette suite f_k converge vers f dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: $\|f - f_k\|_2$ tend vers zéro si k tend vers l'infini.

- Transformée de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Comme la suite f_k appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f_k}$ est bien définie *via* la relation $\widehat{f_k}(\omega) = \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$. On peut montrer que cette suite $\widehat{f_k}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et converge dans cet espace vers une fonction notée $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F} f$ qui définit la transformation de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. De plus, on a pour "presque tout" $\omega \in \mathbb{R}$,
$(\mathscr{F} f)(\omega) \;= \widehat{f}(\omega) = \lim_{k \to +\infty} \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
On constate que la définition de la transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ n'est pas aussi immédiate que dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Elle a de toutefois de nombreuses propriétés, très simples à énoncer.

- Conservation, à un facteur 2π près, du produit scalaire

On rappelle que pour deux fonctions f et g de carré intégrables, le produit scalaire $(f, g) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ est bien défini. On a la relation de Bessel-Parseval : $(\widehat{f}, \widehat{g}) = 2\pi\,(f, g)$. A un facteur 2π près, la transformation de Fourier conserve le produit scalaire. Dans le cas où $f = g$, cette conservation du produit scalaire s'écrit comme une conservation des normes : $(\widehat{f}, \widehat{f}) \;= \|\mathscr{F} f\|_2^2 = 2\pi\,\|f\|_2^2 \;= 2\pi\,(f, f)$.

- Opérateur de Fourier conjugué dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

On étend comme dans le cas précédent la transformée de Fourier conjuguée à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) \;= \widehat{f}(\omega) = \lim_{k \to +\infty} \int_{-k}^{k} \exp(i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$. On a également, pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,
$(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = (\mathscr{F} f)(-\omega)$.

- Théorème d'inversion de Fourier (seconde formulation)

On a dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ les relations suivantes entre l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ et l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$: $\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F} = \mathscr{F}{\circ}\overline{\mathscr{F}} = 2\pi\,\mathrm{id}$. On peut aussi écrire ces relations sous la forme $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la transformée de Fourier dans l'espace des fonctions de carré intégrable est égal à l'opérateur de Fourier conjugué.
On en déduit que pour toute fonction f de carré intégrable, on a $f = \frac{1}{2\pi}(\mathscr{F}{\circ}\overline{\mathscr{F}})(f)$ et on a aussi $f = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F})(f)$. En particulier pour (presque) tout nombre réel t, on a les égalités $f(t) = \frac{1}{2\pi}\big(\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}f)\big)(t)$ et $f(t) = \frac{1}{2\pi}\big(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f)\big)(t)$. On ne peut ensuite écrire ces égalités avec des intégrales que si les fonctions f et $\mathscr{F}f$ sont intégrables.

- Calcul d'une transformée de Fourier à l'aide du théorème d'inversion de Fourier

Pour la fonction porte, on se donne $T > 0$. On déduit [exercice !] des égalités précédentes la relation $\mathscr{F}\big(\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega T}{2}\big)\big)(t) = \frac{2\pi}{T} P_T(t)$. En particulier pour $T = 2$, $(\mathscr{F}\mathrm{sinc})(t) = \pi$ si $|t| < 1$ et $(\mathscr{F}\mathrm{sinc})(t) = 0$ si $|t| > 1$. Grâce au théorème d'inversion de Fourier, on a calculé la transformée de Fourier du sinus cardinal sans jamais écrire une seule intégrale !