le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 12 Filtrage linéaire (ii)

- Circuit RC

On reprend l'étude du filtre RC. Maintenant, la tension d'entrée $u(t)$ peut être une distribution. De même, la tension de sortie $y(t)$ doit être recherchée dans l'espace des distributions. Le filtre T transforme le signal $u(t)$ en un nouveau signal $y(t)$: $y = T\,u$. L'équation différentielle qui relie l'entrée et la sortie reste inchangée : $RC\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$.
On a vu que la solution générale de cette équation peut s'écrire $u = h * u$ avec la réponse impultionnelle $h(t)$ donnée par l'expression suivante $h(t) = \frac{H(t)}{RC} \exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ en fonction des données et de la fonction de Heaviside H.

- Réponse impulsionnelle ou solution élémentaire

La relation "entrée-sortie" $RC\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$ du filtre RC doit être considérée au sens des distributions. Si on injecte la fonction $y(t) = \frac{H(t)}{RC} \exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ dans cette équation, il vient (c'est un exercice sur la dérivation des fonctions au sens des distributions !) : $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$, masse de Dirac en zéro.
Réciproquement, si on cherche une distribution h solution de l'équation différentielle $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$, on trouve nécessairement comme unique solution la réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{H(t)}{RC} \exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$. Cette fonction porte alors bien son nom : c'est la réponse (la sortie) du filtre lorsqu'on se donne comme entrée l'impulsion δ de Dirac.
La preuve de se résultat est relativement délicate. Si on teste l'équation $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$ contre une famille de fonctions de l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ de support de plus en plus concentré autour d'un point $t \neq 0$, on en déduit que la distribution h est en fait une fonction qui vérifie l'équation différentielle $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = 0$ dans le domaine $t < 0$ et dans le domaine $t > 0$. Par suite, $h(t) = \alpha \exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ si $t < 0$. Si $\alpha \neq 0$, la fonction h a un comportement exponentiel pour $t < 0$. Elle n'est donc pas à croissance lente et rien n'établit alors que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est effectivement définie pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Cette fonction exponentielle croît trop vite pour pouvoir être considérée comme une distribution. Donc $\alpha = 0$ et la fonction h est causale. Pour $t > 0$, on a de la même façon $h(t) = \beta \exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ avec une constante β qu'il convient de déterminer.
Si on teste l'équation $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$ contre une famille de fonctions centrées autour de l'origine, on doit nécessairement avoir la discontinuité $[h]_0 \equiv h(0^+) - h(0^-)$ de la fonction h à l'origine qui vérifie $RC\,[h]_0 = 1$. On en déduit que $RC\,\beta = 1$ et on trouve de cette façon l'expression $h(t) = \frac{H(t)}{RC} \exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ de la réponse impulsionnelle, appelée également solution élémentaire de l'équation différentielle.

François Dubois, décembre 2017.

- Fonction de transfert

Par définition, la fonction de transfert d'un filtre est la tranformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle. Un calcul de $\widehat{h}(\omega)$ à partir de l'expression donnée au paragraphe précédent est laissé au lecteur. Mais on peut mener un calcul direct à partir de l'équation d'évolution. En effet, on déduit de la relation d'entrée-sortie linnéaire $y = h * u$ l'expression entre les transformées de Fourier : $\widehat{y} = \widehat{h}\,\widehat{u}$.

Pour mener un calcul direct de la fonction de transfert, on remarque que la transformée de Fourier de la dérivée de $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}t}$ est égal à $i\omega\,\widehat{y}(\omega)$. Donc si on prend la transformée de Fourier de la relation $RC\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$ qui définit le filtre, il vient $RC\,i\omega\,\widehat{y}(\omega) + \widehat{y}(\omega) = \widehat{u}(\omega)$ qu'on peut encore écrire $[1 + RC\,i\omega]\,\widehat{y}(\omega) = \widehat{u}(\omega)$. Le rapport $\widehat{h}(\omega) \equiv \frac{\widehat{y}(\omega)}{\widehat{u}(\omega)}$ est donc donné par l'expression $\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{1+RC\,i\omega}$.

- Filtre linéaire différentiel

On généralise le filtre RC au cas général d'une sortie $y(t)$ donnée en fonction de l'entrée $u(t)$ par l'équation différentielle linéaire suivante : $\frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}t^q} + \sum_{k=0}^{q-1} b_k\,\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{j=0}^{p} a_j\,\frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}t^j}$.

Le filtre RC est un cas particulier très simple de filtre linéaire différentiel. On a en effet dans ce cas $q = 1$, $b_0 = \frac{1}{RC}$, $p = 0$ et $a_0 = \frac{1}{RC}$.

Deux polynômes sont associés à cette équation différentielle : $P(X) = \sum_{j=0}^{p} a_j X^j$ et $Q(X) = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k$.

- Fonction de transfert d'un filtre linéaire différentiel

Avec les notations précédentes, la fonction de transfert $\widehat{h}$ du filtre linéaire T défini par l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}t^q} + \sum_{k=0}^{q-1} b_k\,\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{j=0}^{p} a_j\,\frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}t^j}$ a une expression donnée par la relation $\widehat{h}(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$.

Il suffit d'appliquer une transformation de Fourier aux deux membres de l'équation précédente, apres avoir remarqué que $\big(\mathscr{F}\big(\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}\big)\big)(\omega) = (i\omega)^k\,\widehat{y}(\omega)$.

- Réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire différentiel

Avec les notations précédentes, on suppose de plus que la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ n'a que des pôles simples et qu'ils ne sont pas situés sur l'axe imaginaire pur. En d'autres termes, les racines z_k du polynôme Q sont simples et on une partie réelle toujours non nulle. On décompose la fraction $\frac{P(X)}{Q(X)}$ en éléments simples : $\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{\ell=0}^{p-q} \alpha_\ell X^\ell \;+ \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{X - z_k}$. Alors la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre linéaire T peut s'écrire $h(t) = \sum_{\ell=0}^{p-q} \alpha_\ell\,\delta^{(\ell)} \;+ \sum_{k,\,Re z_k<0} \beta_k \exp(z_k t) H(t) \;- \sum_{k,\,Re z_k>0} \beta_k \exp(z_k t) H(-t)$.