le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 13 Filtres discrets

- Translation temporelle

On rappelle que pour $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la fonction translatée $\tau_a \varphi$ de la fonction φ est définie par $(\tau_a \varphi)(t) = \varphi(t-a)$.
Alors pour toute fonction f bornée sur $\mathbb{R}$, on vérifie simplement que $\int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, (\tau_{-a} \varphi)(t)\, \mathrm{d}t$. Si on se donne une distribution $U \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, la distribution translatée $\tau_a U$ est définie de sorte que la relation précédente soit satisfaite dans le cas où U est une fonction bornée. On pose donc $< \tau_a U, \varphi > = < U, \tau_{-a} \varphi >$ pour toute fonction test φ.
On vérifie alors que $\tau_a \delta = \delta_a$, masse de Dirac au point a. Cette relation se généralise aux itérés de l'opérateur de translation τ_a : $(\tau_a)^k \, \delta = \delta_{ka}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- Signaux discrets

On se donne un pas d'échantillonnage en temps $a > 0$. Un signal discret x n'est connu que par ses valeurs x_k en des instants $t_k = k\,a$ qui sont tous multiples entiers du pas de temps. On le modélise d'un point de vue mathématique avec une variante du peigne de Dirac. On pose $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\,a}$. Si tous les x_k sont nuls sauf pour $k = 0$ pour lequel on a $x_0 = 1$, alors le signal x est égal à la masse de Dirac. Si tous les x_k valent 1 pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors le signal x est égal au peigne de Dirac Δ_a.
L'ensemble des signaux discrets x de la forme $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\,a}$ est noté X_a.

- Espaces de signaux discrets

Les signaux discrets bornés, intégrables ou de carré intégrables constituent les espaces ℓ_a^∞, ℓ_a^1 et ℓ_a^2 respectivement. On a par définition $x \in \ell_a^\infty$ si et seulement si $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| < \infty$, $x \in \ell_a^1$ si et seulement si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ et $x \in \ell_a^2$ si et seulement si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty$. Les espaces ℓ_a^∞, ℓ_a^1 et ℓ_a^2 sont normés et les normes associées sont définies par $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|$ pour $x \in \ell_a^\infty$, $\|x\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|$ pour $x \in \ell_a^1$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2}$ si $x \in \ell_a^2$.

- Translation temporelle d'un signal discret

Si $x \in X_a$ est un signal discret, c'est à dire $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\,a}$, alors son translaté temporel $\tau_a x$ est un nouveau signal temporel qui se calcule selon la relation $\tau_a x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{k-1} \, \delta_{k\,a}$. En d'autres termes, $(\tau_a x)_k = x_{k-1}$.

- Une autre expression d'un signal discret

On se donne un signal discret $x \in X_a$ de la forme $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\,a}$. Alors on peut l'écrire à l'aide de l'opérateur de translation : $x = \big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, (\tau_a)^k \big) \, \delta$.

François Dubois, janvier 2018.

- Filtre discret

Un filtre discret T est un opérateur $X_a \longrightarrow X_a$ qui à un signal discret $x \in X_a$ associe un nouveau signal discret $y = T(x) \in X_a$ (noté aussi $y = Tx$) de sorte à satisfaire les trois propriétés suivantes de linéarité, continuité et invariance par translation temporelle.
La linéarité exprime d'une part que $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ pour tout les signaux d'entrée x_1 et x_2 de X_a et d'autre part que $T(\lambda\, x) = \lambda\, T(x)$ pour tout scalaire λ et tout signal d'entrée $x \in X_a$.
La continuité exprime qu'une norme du signal de sortie (en pratique une des trois normes introduites plus haut) est toujours contrôlée par la norme correspondante du signal d'entrée :
$\exists\, C \geq 0,\ \forall x \in X_a,\ \|Tx\| \leq C\, \|x\|$.
L'invariance par translation temporelle est une conséquence du l'hypothèse très générale qu'aucun instant n'est privilégié : l'opérateur T commute avec la translation temporelle τ_a :
$T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$ et pour tout signal x, $T(\tau_a x) = \tau_a(Tx)$.

- Exemples de filtres discrets

Les exemples de filtres fondamentaux sont l'identite id et la translation τ_a. On a $\mathrm{id}x = x$ pour tout signal $x \in X_a$. La translation temporelle a été définie plus haut dans ce chapitre. On peut aussi se donner des formules de calcul qui permettent d'expliciter le signal de sortie $y = Tx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, \delta_{n\,a}$ en fonction du signal d'entrée $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{n\,a}$. Pour les deux exemples précédents, on a respectivement $y_n = x_n$ et $y_n = x_{n-1}$.
Ainsi, les relations $y_n = \frac{1}{2}\,(x_n + x_{n-1})$, $y_n = \frac{1}{4}\,x_n + \frac{1}{2}\,x_{n-1} + \frac{1}{4}\,x_{n-2}$ et $y_n = \frac{1}{4}\,x_{n+1} + \frac{1}{2}\,x_n + \frac{1}{4}\,x_{n-1}$ définissent trois filtres. Nous invitons le lecteur à vérifier pour ces trois exemples les propriétés de linéarité, continuité et invariance par translation dans le temps.

- Convolution de deux masses de Dirac

On se donne deux nombres réels a et b. Alors le produit de convolution de la masse de Dirac au point a par la masse de Dirac au point b est égal à la masse de Diracc au point $a+b$:
$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

- Structure d'un filtre discret

On se donne un filtre discret $T : X_a \longrightarrow X_a$ qui satisfait les propriétés de linéarité, continuité et invariance temporelle proposées plus haut. Alors le signal de sortie Tx pour une entrée $x \in X_a$ s'exprime comme un produit de convolution : $Tx = h * x$. Le signal h est appelé réponse impulsionnelle du filtre. Il est donné par $h = T\delta$, signal de sortie pour une entrée égale à l'impulsion de Dirac δ.

- Convolution discrète

Le produit de convolution $h * x$ du signal discret h par le signal discret x est un signal discret qui se décompose, quand il est défini, sur les masses de Dirac δ_{pa} multiples du pas de temps a:
$h * x = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (h*x)_p\, \delta_{pa}$. Le nombre $(h*x)_p$ est donné par la somme de la série suivante : $(h*x)_p = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} h_\ell\, x_{p-\ell}$.
Une question importante est de savoir dans quelles conditions la série précédente est effectivement convergente.

- Convolution d'un signal dans ℓ_a^∞ par un signal dans ℓ_a^1

Si $h \in \ell_a^\infty$ ($\sup_{k\in\mathbb{Z}} |h_k| < \infty$) et $x \in \ell_a^1$ ($\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$), alors le produit de convolution $h * x$ est bien défini, il appartient à ℓ_a^1 et on a l'inégalité $\|h * x\|_1 \leq \|h\|_\infty \|x\|_1$.

- Convolution de deux signaux dans ℓ_a^2

Si $h \in \ell_a^2$ ($\sup_{k\in\mathbb{Z}} |h_k|^2 < \infty$) et $x \in \ell_a^2$ ($\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty$) également, alors le produit de convolution $h * x$ est bien défini. Il appartient à ℓ_a^∞ et on a l'inégalité $\|h * x\|_\infty \leq \|h\|_2 \|x\|_2$.

- Signal causal

Un signal $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \delta_{ka}$ est causal si et seulement si les coefficients x_k sont tous nuls si $k \leq -1$. On note X_a^+ l'ensemble de tous les signaux causaux.

- Filtre causal

Un filtre discret $T : X_a \longrightarrow X_a$ est causal si et seulement si il transforme tout signal causal $x \in X_a^+$ en un signal causal $Tx \in X_a^+$. On peut également considérer le filtre T comme un opérateur de X_a^+ dans X_a^+.

- Réponse impulsionnelle causale

Un filtre discret T défini par sa réponse impulsionnelle h (on a donc $Tx = h * x$) est causal si et seulement si le signal $h = T\delta$ est un signal causal. La propriété $(x \in X_a^+ \Longrightarrow Tx \in X_a^+)$ est équivalente à $h \in X_a^+$.

Dans le cas d'un filtre causal de réponse impulsionnelle h et d'un signal causal x, le coefficient $(h * x)_p$ du produit de convolution $h * x$ est donné par une somme finie. Il est donc toujours défini.