le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 2 Équations différentielles

• Une propriété des intervalles.

On se donne un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$. Typiquement, $I =]a, b[$ avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. On considère une fonction f définie sur I et dérivable en tout point de l'intervalle I. On suppose de plus que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction f est constante : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$.

On note que si f est définie sur un ensemble plus compliqué qu'un intervalle, comme par exemple la réunion de deux intervalles disjoints, alors l'annulation de la dérivée de f en tout point n'entraîne pas le fait que la fonction f est une constante ; elle est simplement constante dans chaque intervalle qui compose l'ensemble où elle est définie.

• Un résultat fondamental

On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. On cherche une fonction $t \longmapsto u(t)$ définie pour $t \in [0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui satisfait aux deux conditions de système dynamique :

(i) évolution pour $t > 0$: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = 0$

(ii) condition initiale : $u(0) = u_0$.

Alors la fonction $v(t) = u(t) \exp(\lambda\, t)$ a une dérivée nulle donc est constante dans l'intervalle où la fonction u peut être définie : $v(t) = v(0)$. De plus, la valeur $v(0)$ est donnée par la condition initiale ; donc $v(0) = u_0$. On en déduit que nécessairement, pour tout $t \geq 0$, $u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, u_0$. Réciproquement, on vérifie que la fonction $u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, u_0$ satisfait effectivement la condition de dévolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = 0$ et la condition initiale $u(0) = u_0$. Le système dynamique a donc une solution unique donné par la fonction exponentielle.

• Equation différentielle avec second membre

On se donne maintenant une fonction continue f de $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On modifie la dynamique et on cherche une fonction inconnue u telle que

(i) évolution pour $t > 0$: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$

(ii) condition initiale : $u(0) = u_0$.

Si on dispose d'une solution particulière $u_p(t)$ de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$, on peut chercher la fonction $u(t)$ solution de l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$ et de la condition initiale $u(0) = u_0$ sous la forme $u(t) = u_p(t) + w(t)$. Alors la fonction w est solution d'un problème homogène : $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \lambda\, w(t) = 0$ pour $t > 0$ et $w(0) = u_0 - u_p(0)$.

La question est donc de trouver une solution particulière.

François Dubois, septembre 2020.

- Méthode de variation de la constante

On cherche une solution de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$ en faisant varier la constante u_0 dans l'expression $u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, u_0$. On cherche donc $u(t)$ sous la forme $u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, \varphi(t)$, où φ est une fonction inconnue du temps. Quand on injecte cet *a priori* dans l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$, on obtient la relation $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \exp(\lambda\, t)\, f(t)$. Il suffit donc d'une simple quadrature pour calculer une solution particulière. Par exemple avec $\varphi(0) = 0$, il vient $\varphi(t) = \int_0^t \exp(\lambda\, \theta)\, f(\theta)\, \mathrm{d}\theta$ et $u_p(t) = \int_0^t \exp(-\lambda\, (t-\theta))\, f(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.
On peut finalement exprimer l'unique solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$ jointe à la condition initiale $u(0) = u_0$ grâce à la formule de Duhamel [Jean-Marie Duhamel, 1797-1872] : $u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, u_0 + \int_0^t \exp(-\lambda\, (t-\theta))\, f(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

- "Recettes de cuisine" pour trouver une solution particulière

Dans de nombreux cas, la méthode de variation de la constante donne des calculs un peu longs qu'on peut éviter avec les règles semi-empiriques qui suivent.
Si f est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré. Par exemple, une solution particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = t$ vaut simplement $u_p(t) = t - 1$.
Si f est une combinaison de fonctions circulaires sinus et cosinus, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison de sinus et cosinus analogues. Par exemple, on cherche une solution particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = \sin t$ sous la forme $u(t) = \alpha\, \sin t + \beta\, \cos t$. Alors $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\beta\, \sin t + \alpha\, \cos t$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = (\alpha - \beta)\, \sin t + (\alpha + \beta)\, \cos t$. On doit résoudre un système linéaire de deux équations et d'inconnues α et β. Il vient finalement $u_p(t) = \frac{1}{2}\, \sin t - \frac{1}{2}\, \cos t$.
Si f est une fonction exponentielle, on cherche une solution particulière sous la forme d'une exponentielle. On cherche par exemple particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = \exp(t)$, on pose $u(t) = \alpha\, \exp(t)$. Alors $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 2\, \alpha\, \exp(t)$ et par identification, $u_p(t) = \frac{1}{2}\, \exp(t)$.

- Quand le second membre est solution de l'équation homogène

Cherchons par exemple une solution particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = \exp(-t)$. Le choix conseillé $u(t) = \alpha\, \exp(-t)$ n'aboutit pas car cette fonction est solution de l'équation homogène ! Il suffit alors de multiplier la solution précédente par la fonction linéaire $t \longmapsto t$, c'est à dire $u(t) = \alpha\, t\, \exp(-t)$. On trouve alors sans difficulté $u_p(t) = t\, \exp(-t)$.

- Système différentiel linéaire

On se place maintenant dans l'espace $\mathbb{R}^2$. On se donne une matrice carrée A réelle d'ordre deux, un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^2$ et on cherche un vecteur inconnu $X(t)$ qui est une fonction de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de sorte que

(i) évolution pour $t > 0$: $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + A\, X(t) = 0$

(ii) condition initiale : $X(0) = X_0$.

Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, ce problème se ramène au cas scalaire étudié juste au dessus. Rappelons qu'on est certain qu'une matrice réelle est diagonalisable dans les deux cas suivants : si son polynôme caractéristique n'a que des racines réelles simples ou bien si elle est symétrique. Elle peut être également diagonalisable dans le cas de valeurs propres

réelles multiples, mais pas toujours !
En effet, on introduit une matrice de passage P et une matrice diagonale $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2)$ de sorte que $P^{-1}AP = \Lambda$. Alors $A = P\Lambda P^{-1}$ et l'équation dynamique peut s'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(P^{-1}X\big) + \Lambda\big(P^{-1}X(t)\big) = 0$. Si on pose $Y = P^{-1}X = (y_1, y_2)^{\mathrm{t}}$, le système différentiel précédent est formé de deux équations différentielles découplées : pour $j = 1, 2$, on a $\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} + \lambda_j\, y_j(t) = 0$. Jointe à la condition initiale $y_j(0) = (P^{-1}X_0)_j$, j^{o} composante du vecteur $P^{-1}X_0$, ce système dynamique est exactement, aux notations près, celui traité dans le premier paragraphe de cette leçon. On en déduit $y_j(t) = \exp(-\lambda_j t)\,(P^{-1}X_0)_j$ pour tout indice j égal à 1 ou 2. Finalement, la solution du système différentiel homogène peut s'expliciter :
$X(t) = P\,\mathrm{diag}\,\big(\exp(-\lambda_1 t), \exp(-\lambda_2 t)\big)\,P^{-1}X_0$.

- Un résultat général

On se donne un entier $n \geq 1$ et une matrice réelle carrée$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors l'ensemble de toutes les solutions du système différentiel $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$ est un espace vectoriel réel de dimension n exactement.
Notons que ce résultat est vrai quelle que soit la matrice A, qu'elle soit diagonalisable ou pas.
Par exemple, considérons le cas $n = 2$ et la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On peut se convaincre facilement que deux solutions linéairement indépendantes du système $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$ peuvent sécrire $X_1(t) = (\sin t, \cos t)^{\mathrm{t}}$ et
$X_2(t) = (-\cos t, \sin t)^{\mathrm{t}}$.

- Extension aux matrices diagonalisables sur le corps des nombres complexes

Tout ce qui vient d'être proposé pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients réels s'étend au corps des nombres complexes. Si la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable sur le corps des complexes, la solution $X(t) \in \mathbb{C}^n$ du système différentiel $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$ pour t nombre réel strictement positif, joint à la condition initiale $X(0) = X_0$ pour une donnée initiale $X_0 \in \mathbb{C}^n$ peut être explicité par la relation $X(t) = P\,\mathrm{diag}\,\big(\exp(-\lambda_1 t), \ldots, \exp(-\lambda_n t)\big)\,P^{-1}X_0$.
Par exemple, considérons le cas $n = 2$ et la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons vu que cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Mais elle a deux valeurs propres distinctes sur $\mathbb{C}$. Elle est donc diagonalisable en passant aux nombres complexes. On peut résoudre $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$ avec $X(0) = (1, 0)^{\mathrm{t}}$ pour fixer les idées. Avec un calcul direct, on peut utiliser la méthode de diagonalisation avec des nombres complexes. Mais il est préférable de chercher une solution sous la forme d'une combinaison de fonctions de base réelles de l'espace vectoriel de dimension deux du système $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$. Ainsi, avec $X_1(t) = (\sin t, \cos t)^{\mathrm{t}}$ et $X_2(t) = (-\cos t, \sin t)^{\mathrm{t}}$ introduites plus haut, on pose $X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$. La condition initiale force alors la valeur des paramètres : $\alpha = 0$ et $\beta = -1$.

- Système différentiel linéaire d'ordre deux avec un terme source

Pour résoudre un système différentiel avec terme source $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = F(t)$, la méthode de variation des constantes peut s'étendre comme suit. On introduit une base $\big(X_1(t), X_2(t)\big)$ de l'espace des solutions de l'équation homogène : $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$. Puis on cherche des fonctions $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ de sorte que $X(t) = \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(t)\, X_j(t)$. Si on développe le vecteur $F(t)$ dans la base

$\big(X_1(t), X_2(t)\big)$, on dispose de fonctions $f_1(t), f_2(t)$ de sorte que $F(t) = \sum_{j=1}^{2} f_j(t)\, X_j(t)$. Pour chaque indice j, on obtient alors l'équation d'ordre un $\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}t} = f_j(t)$ qui se résout par la simple évaluation d'une intégrale.
Dans ce cas, la formule de Duhamel peut s'étendre mais l'exposer en détail dépasse le champ possible d'investigation de ce chapitre.
Les "recettes de cuisine" pour trouver une solution particulière s'adaptent sans difficulté. Si f est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré. Si f est une combinaison de fonctions circulaires sinus et cosinus, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison de sinus et cosinus analogues. Si f est une fonction exponentielle, on cherche une solution particulière sous la forme d'une exponentielle.
Si en particulier la source $F(t)$ est dirigée selon un vecteur propre r_j de la matrice A avec une variation temporelle pilotée par la valeur propre associée, c'est à dire $F(t) = \exp(-\lambda_j t)\, r_j$ avec $A\, r_j = \lambda_j\, r_j$, il suffit de chercher une solution particulière de la forme
$X(t) = t\, \exp(-\lambda_j t)\, r_j = t\, F(t)$.

- Equation différentielle d'ordre deux

Si on revient à l'exemple d'un système de dimension deux déjà envisagé ici : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - y(t) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + x(t) = 0$, on remarque qu'on a $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = 0$. La connaissance des solutions de cette équation différentielle du second ordre permet d'aider à la résolution du système du premier ordre.
Réciproquement, une équation différentielle linéaire d'ordre deux est équivalente à un système différentiel linéaire d'ordre un en dimension deux.
Considérons par exemple l'équation d'évolution d'un système masse-ressort
$m\, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\, x(t) = f(t)$ ou d'un circuit électrique de la forme "RLC" :
$RC\, \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = V(t)$. On peut l'écrire dans les deux cas $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \beta\, x(t) = g(t)$. En posant $y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, cette équation prend la forme d'un système différentiel du premier ordre $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + A\, X(t) = F(t)$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$. On parle d'un oscillateur harmonique amorti dans ce cas.

Exercices

- Equation différentielle

On désigne par a un nombre réel. Montrer que l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\, u(t) = 0$ jointe à la condition initiale $u(0) = u_0$ entraîne que l'on a nécessairement $u(t) = \exp(-at)\, u_0$ pour tout réel t.

- Equations différentielles

a) Calculer la solution $u(t)$ de l'équation différentielle
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = t$ qui satisfait à la condition initiale $u(0) = 1$.
b) Reprendre la question a) si on change le second membre de l'équation différentielle : la fonction $v(t)$ est maintenant solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v(t) = \exp(-t)$ associée à la même condition initiale $v(0) = 1$.

- Equation différentielle ordinaire [novembre 2012]

Calculer (pour $t > 0$) les valeurs $y(t)$ de la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y(t)}{2} = t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

- Equations différentielles [février 2013]

Dans tout l'exercice, on désigne par τ une constante réelle strictement positive.

a) Montrer que si la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante C telle que $\varphi(t) = C \exp\big(-\frac{t}{\tau}\big)$.

b) En déduire que si la fonction φ est solution de l'équation différentielle introduite à la question a), avec la condition initiale $\varphi(0) = 0$, alors elle est nulle.

c) Proposer une expression pour la solution $\psi(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\psi(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $\psi(0) = 0$.

d) On désigne par H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t \leq 0$. Quelle est la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}f(t) = H(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $f(0) = 0$? On pourra utiliser les questions précédentes et imposer à la fonction f d'être continue en $t = 0$.

- Equations différentielles [avril 2013]

Dans tout l'exercice, on désigne par a une constante réelle strictement positive.

a) Montrer que si la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - a\,\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante C telle que $\varphi(t) = C \exp(at)$.

b) En déduire si la fonction φ est solution de l'équation introduite en a) avec la condition initiale $\varphi(0) = 0$, alors elle est nulle.

c) Proposer une expression pour la solution $\psi(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} - a\,\psi(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $\psi(0) = 0$.

On désigne par H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t \leq 0$.

d) Quelle est la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} - a\,f(t) = t\,H(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $f(0) = 0$? On pourra utiliser les questions précédentes et imposer à la fonction f d'être continue en $t = 0$.

- Equation différentielle [février 2014]

a) Calculer la fonction solution φ_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} + \varphi_1(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et de la condition initiale $\varphi_1(0) = 1$.

b) Calculer la fonction solution φ_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle avec le second membre $\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} + \varphi_2(t) = \sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec la même condition initiale $\varphi_2(0) = 1$.

c) On désigne par H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t \leq 0$. Proposer une expression $\varphi_3(t)$ pour la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}t} + \varphi_3(t) = H(t)\,\sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec toujours la même condition initiale : $\varphi_3(0) = 1$.

- Equation différentielle [février 2015]

a) Calculer les valeurs $u_1(t)$ de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + u_1(t) = 0$ pour tout nombre réel t et satisfaisant aux conditions initiales $u_1(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}(0) = 1$.

b) Même question avec u_2 solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}t^2} + u_2(t) = 1$ associée aux conditions initiales de la question a). On pourra remarquer que l'équation proposée à cette question admet une solution particulière constante.
c) Montrer que la fonction u_3 définie par $u_3(t) = u_1(t)$ si t est strictement négatif et par $u_3(t) = u_2(t)$ si t est positif ou nul, est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.
d) La fonction u_3 est-elle continue ?
e) Est-elle dérivable au point $t = 0$?

• Equation différentielle [avril 2015]
On se propose de déterminer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.
a) Quelle est l'expression de la solution générale de l'équation précédente sans second membre ?
b) Chercher une solution particulière de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = t^2$ sous la forme d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à deux.
c) Proposer une solution analytique de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.
d) Vérifier que la relation proposée à la question précédente est effectivement solution du problème posé à la question c).

• Equation différentielle [février 2016]
a) Calculer la solution $u(t)$ de l'équation différentielle homogène $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$ avec la condition initiale $u(0) = 1$.
b) Même question pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1(t) = 1$ avec la condition initiale $u_1(0) = 1$.
c) On se donne la fonction de Heaviside H. Reprendre la même question pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2(t) = H(t)$, avec la condition initiale $u_2(0) = 1$.
d) Même question pour l'équation $\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + u_3(t) = 1 - H(t)$, tout en conservant avec la condition initiale $u_3(0) = 1$.

• Equation différentielle d'ordre deux avec terme source discontinu
On cherche une fonction u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue, dérivable et telle que sa fonction dérivée est également continue (on dit alors que la fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$) de sorte que $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + u(t) = H(t)$ si t est différent de zéro avec la double condition initiale $u(0) = 0$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 1$.
a) Expliciter une fonction u_1 solution de l'équation homogène avec les deux conditions initiales en $t = 0$.
b) Expliciter une fonction u_2 solution de l'équation $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + u(t) = 1$ avec les deux mêmes conditions initiales en $t = 0$.
c) En déduire la solution du problème posé au début de l'énoncé.