le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 6 Intégrale double

- Introduction

On se donne une partie bornée Ω du plan $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale double de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui, quand il existe, se note $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ou parfois $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et souvent plus simplement $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ou même $\int_\Omega f$.

- Intégrale double de la fonction "un"

Si on prend le rectangle $]a,b[\times]c,d[$ du plan $\mathbb{R}^2$ (avec $a<b$ et $c<d$), l'intégrale double de la fonction $f(x,y)\equiv 1$ est simplement la surface $(b-a)\,(d-c)$ du rectangle :
$\int_{]a,b[\times]c,d[} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (b-a)\,(d-c)$.
De façon générale, si Ω désigne une partie bornée du plan, l'intégrale double sur Ω de la fonction $f(x,y)\equiv 1$ est la surface $|\Omega|$ du domaine : $\int_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |\Omega|$.

- Linéarité

On suppose connue l'intégrale double $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et on se donne un nombre λ. Alors $\int_\Omega (\lambda\, f)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Si on se donne aussi l'intégrale double $\int_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ de la fonction g, alors $\int_\Omega (f+g)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

- Positivité

On suppose la fonction f positive sur Ω: $f(x,y)\geq 0, \forall\,(x,y)\in\Omega$. Alors $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq 0$.
Si $f\leq g$ sur Ω c'est à dire $f(x,y)\leq g(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\Omega$, alors
$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \int_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ [exercice].

- Additivité par rapport au domaine

On suppose l'ensemble Ω décomposé en une réunion finie de parties Ω_i "plus simples", $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ de sorte que l'intersection $\Omega_i\cap\Omega_j$ est de surface nulle si $i\neq j$: $|\Omega_i\cap\Omega_j| = 0$.
Alors l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i:
$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

- Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω comme ci-dessus et une fonction f "étagée" sur Ω, c'est à dire constante sur chacune des parties Ω_i: $\forall\, i,\ \exists\,\lambda_i,\ \forall\,(x,y)\in\Omega_i,\ f(x,y)=\lambda_i$. Le calcul de l'intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^N \lambda_i\,|\Omega_i|$.

- Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et par $f\in\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu'au bord inclus :
$\forall X\in\Omega,\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0,\ \forall\, Y\in\Omega,\ |X-Y|<\eta \Longrightarrow |f(X)-f(Y)|<\varepsilon$. Alors l'intégrale de f sur Ω est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe.

François Dubois, octobre 2020.

Pour établir ce résultat, on utilise l'uniforme continuité de f et on l'approche par des fonctions étagées. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_ε étagée sur Ω de sorte que $f_\varepsilon - \varepsilon \leq f \leq f_\varepsilon + \varepsilon$ sur Ω. Alors le nombre $\int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ satisfait nécessairement aux inégalités
$\int_\Omega f_\varepsilon(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \varepsilon\,|\Omega| \leq \int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \int_\Omega f_\varepsilon(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \varepsilon\,|\Omega|$.
On montre alors d'une part que le nombre $\int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est bien défini et d'autre part qu'on peut l'approcher en calculant l'intégrale d'une fonction en escalier qui approche la fonction f.

- Intégrale d'une fonction positive

On se donne $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et f fonction positive $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}:\ f(x, y) \geq 0$ pour $(x, y) \in \Omega$. L'intégrale $\int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est dans ce cas toujours bien définie, quitte à accepter la valeur $+\infty$. Par exemple pour $f(x, y) \equiv 1$ et $\Omega = \mathbb{R}^2$, on a $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = +\infty$. Si l'intégrale n'est pas infinie, si c'est un nombre réel positif, on écrit cette propriété sous la forme $\int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$.

- Théorème de Tonnelli

On se donne une fonction positive f définie dans $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles. Notons qu'on peut toujours se ramener à ce cas si f est définie de Ω dans $\mathbb{R}$ en supposant f nulle hors de Ω. Pour x réel fixé on note $F(x) = \int_\mathbb{R} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ le nombre positif éventuellement égal à $+\infty$ obtenu en intégrant la fonction f par raport à la seconde variable y, en laissant la première fixée. De même, on note $G(y) = \int_\mathbb{R} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ le nombre positif au besoin égal à $+\infty$ si l'intégrale diverge, résultat de l'intégrale de la fonction f par raport à la première variable x en laissant la deuxième fixe. Alors les intégrales de F et G sont égales et permettent de calculer l'intégrale double de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$: $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} G(y)\,\mathrm{d}y$.
En explicitant les valeurs des fonctions F et G, la conclusion du théorème de Tonnelli s'écrit souvent sous la forme $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x \big[\int_\mathbb{R} f(x, y)\,\mathrm{d}y \big] = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}y \big[\int_\mathbb{R} f(x, y)\,\mathrm{d}x \big]$. On peut toujours intégrer une fonction positive de deux variables dans l'ordre que l'on veut.
La relation précédente montre que si l'une des deux intégrales simples $\int_\mathbb{R} F(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_\mathbb{R} G(y)\,\mathrm{d}y$ est infinie, il en est de même de l'intégrale double qui est alors infinie. Si l'une des intégrales $\int_\mathbb{R} F(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_\mathbb{R} G(y)\,\mathrm{d}y$ est finie, alors c'est aussi le cas pour l'intégrale double $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. On écrit alors $0 \leq \iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$.

- Exemple d'utilisation du théorème de Tonnelli

On peut par exemple vérifier la conclusion du thérème de Tonnelli en considérant la fonction f égale à 1 dans le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et égale à 0 ailleurs. Les deux calculs précédents de l'intégrale double de f sur $\mathbb{R}^2$ redonnent la surface $|D|$ du demi-disque D, à savoir $\frac{\pi}{2}$.

- Théorème de Fubini

On se donne maintenant une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles ou éventuellement complexes. On suppose que l'intégrale double de la fonction positive $|f|$ est finie :
$\iint_\Omega |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$. Alors l'intégrale double de f sur $\mathbb{R}^2$ est bien définie ; c'est un nombre réel ou complexe que l'on peut calculer à l'aide d'une des relations suivantes :
$\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x \big[\int_\mathbb{R} \mathrm{d}y\, f(x, y) \big]$ ou $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}y \big[\int_\mathbb{R} \mathrm{d}x\, f(x, y) \big]$. Si l'intégrale double est bien définie, c'est à dire si $\iint_\Omega |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est finie, on peut toujours intégrer une fonction de deux variables dans l'ordre que l'on veut.

- Exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On se donne deux réels a et b strictement positifs et le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$. On pose $f(x, y) = x - y$. On vérifie d'abord que l'intégrale de la fonction $|f|$ sur le triangle T est finie puisque $|f(x, y)| \leq a + b$ si $(x, y) \in T$. Donc $\int_T |f(x, y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leq (a+b)\, |T| = (a+b)\, \frac{ab}{2} < \infty$ et on on est dans le cadre des hypothèses du théorème de Fubini. On peut vérifier sur cet exemple [exercice !] que les deux intégrales simples successives $\int_0^a \mathrm{d}x \big[\int_0^{b(1-x/a)} \mathrm{d}y \, (x-y) \big]$ et $\int_0^b \mathrm{d}y \big[\int_0^{a(1-y/b)} \mathrm{d}x \, (x-y) \big]$ sont égales et valent $\frac{ab}{6}\,(b-a)$.

- Changement de variable dans une intégrale double

On se donne une tranformation régulière et bijective F d'une partie $\widehat{\Omega}$ "assez simple géométriquement" vers le domaine d'intégration Ω : $\widehat{\Omega} \ni (\widehat{x}, \widehat{y}) \longmapsto F(\widehat{x}, \widehat{y}) \equiv (x = X(\widehat{x}, \widehat{y}), y = Y(\widehat{x}, \widehat{y})) \in \Omega$. La régularité des fonctions X et Y permet de considérer les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y})$, $\frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y})$, $\frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y})$ et $\frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y})$ qui sont aussi des fonctions définies sur $\widehat{\Omega}$. On forme la matrice jacobienne $J(F)(\widehat{x}, \widehat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}} \\ \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} \end{pmatrix}$, son déterminant $\det(J(F)) = \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}} \frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}} \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}$ et la valeur absolue $|\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y})$ de ce déterminant. Alors l'intégrale d'une fonction f sur Ω peut se calculer à l'aide d'une intégrale sur le domaine des paramètres : $\int_\Omega f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\widehat{\Omega}} f(X(\widehat{x}, \widehat{y}), Y(\widehat{x}, \widehat{y})) \, |\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y}) \, \mathrm{d}\widehat{x} \, \mathrm{d}\widehat{y}$. Dans la relation précédente, il est essentiel de ne pas oublier la valeur absolue du déterminant jacobien, c'est à dire le facteur $|\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y})$.

- Coordonnées polaires du plan

Dans ce cas, le domaine $\widehat{\Omega}$ est noté classiquement avec les variables (r, θ) et le changement de coordonnées F s'écrit simplement $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$. Après transformation de $\widehat{\Omega}$ en Ω par ce passage en coordonnées polaires, on forme le déterminant jocobien $J(r, \theta) \equiv \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} = r$ et on a $\int_\Omega f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\widehat{\Omega}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$.

- Introduction à l'intégration par parties

La question est de généraliser aux intégrales doubles la relation $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = f(b) - f(a)$ toujours vraie pour les intégrales simples dès que f est dérivable et en particulier pour $a < b$. Il faut voir cette relation comme une intégrale sur le bord $\partial(]a, b[) = \{a, b\}$ de l'intervalle $]a, b[$. On peut noter $n_b \equiv +1$ la "normale extérieure" à l'intervalle $]a, b[$ au point b et $n_a \equiv -1$ la normale extérieure à cet intervalle au point a. La relation précédente s'écrit aussi $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = n_a f(a) + n_b f(b)$.

- Frontière

Si Ω est un domaine borné du plan $\mathbb{R}^2$, on suppose sa frontière $\partial\Omega$ assez régulière. La notion de bord, de frontière est assez intuitive. Par exemple, si Ω est le disque de centre l'origine et de rayon R, sa frontière est le cercle de centre O et de même rayon. On paramètre cette courbe $\partial\Omega$ avec des coordonnées cartésiennes : $x = X(t)$, $y = Y(t)$, avec $0 \leq t \leq 1$ pour fixer les idées.

- Normale extérieure

La normale extérieure à un domaine borné Ω du plan est un vecteur unitaire $n(x, y)$ défini, si le bord $\partial\Omega$ est assez régulier, pour tout point $(x, y) \in \partial\Omega$. Ce vecteur $n(x, y) \equiv (n_x(x, y), n_y(x, y))$ est perpendiculaire à la direction tangente à la courbe. Avec un paramétrage $x = X(t),\ y = Y(t)$ de $\partial\Omega$ comme plus haut, on a $n_x \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + n_y \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = 0$ en tout point du contour. De plus, la normale $n(x, y)$ est unitaire : $n_x(x, y)^2 + n_y(x, y)^2 \equiv 1$, pour tout $(x, y) \in \partial\Omega$. Enfin, elle pointe vers l'extérieur de Ω.
Dans le cas du disque de centre l'origine et de rayon R, la normale $n(x, y)$ au point $(x, y) = (R\cos\theta, R\sin\theta) \in \partial\Omega$ sur le bord s'écrit $n(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

- Inégrale de contour

On peut intégrer une fonction f définie sur une courbe Γ. Afin de garantir que l'intégrale de la fonction "un" sur la courbe Γ est égale à la longueur $|\Gamma|$ de cette courbe, on introduit l'abscisse curviligne γ telle que $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ et on pose

$$\int_\Gamma f(x, y)\,\mathrm{d}\gamma = \int_0^1 f(X(t), Y(t)) \sqrt{\Big(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \Big(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\Big)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas du cercle de centre O et de rayon R, si θ désigne l'angle polaire, on a $\mathrm{d}\gamma = R\,\mathrm{d}\theta$ et on peut finalement écrire $\int_\Gamma f(x, y)\,\mathrm{d}\gamma = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,R\,\mathrm{d}\theta$. On retrouve bien que si $f \equiv 1$, son intégrale sur Γ est la longueur du cercle.

- Intégration par parties

L'intégrale double dans le domaine Ω de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ d'une fonction f est égale à une intégrale sur le bord $\partial\Omega$ du domaine. De façon précise, on désigne par $n_j(x, y)$ la composante numéro j de la normale extérieure en un point (x, y) de la frontière. On a
$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f(x, y)\, n_j(x, y)\,\mathrm{d}\gamma$. On peut détailler cette relation pour chacune des deux composantes : $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f(x, y)\, n_x(x, y)\,\mathrm{d}\gamma$ et
$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f(x, y)\, n_y(x, y)\,\mathrm{d}\gamma$. Ces relations sont fondamentales. Entre autres pour de nombreuses applications en ingénierie.

Exercices

- Intégrale simple et intégrale double

La plupart des propriétés de l'intégrale double ont leur équivalent pour l'intégrale simple. A partir des notes de cours, énoncer en regard de chaque propriété de l'intégrale double la propriété équivalente de l'intégrale simple.

- Utilisation du théorème de Tonnelli

Soit D le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Calculer sa surface en utilisant les deux façons de faire que suggère le théorème de Tonnelli.

- Utilisation du théorème de Fubini

Soit T le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

a) Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale $\int_T \left(x + y - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

b) Calculer cette intégrale de deux façons différentes.

- Convolution dans l'espace L^1

On se donne f et g deux fonctions intégrables c'est à dire telles que les intégrales $\int_{\mathbb{R}} |\, f(x) \,|\, \mathrm{d}x \equiv \|\, f \,\|_1$ et $\int_{\mathbb{R}} |\, g(x) \,|\, \mathrm{d}x \equiv \|\, g \,\|_1$ sont finies. On note cette propriété $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors le produit de convolution $f * g$ appartient aussi à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et qu'on a l'inégalité $\|\, f * g \,\|_1 \leq \|\, f \,\|_1 \,\|\, g \,\|_1$.

- Changement de l'ordre d'intégration

On se donne une fonction f bornée sur $]0,\, 1[^2$.

a) Ecrire l'intégrale double $\int_0^1 \mathrm{d}y \left[\int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\, f(x,\, y) \right]$ à l'aide d'une intégrale de la forme $\int_0^1 F(x)\, \mathrm{d}x,$ où F est une fonction qu'on précisera.

b) Achever le calcul pour $f(x,\, y) \equiv 1$.

- Intégrale de Gauss

On se propose de calculer l'intégrale de Gauss $G = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x$.

a) Montrer que cette intégrale G définit bien un nombre réel positif.

b) Relier sa valeur à celle de l'intégrale double $I = \iint_{]0,\,\infty[\,\times\,]0,\,\infty[} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

c) Calculer ensuite I en passant en coordonnées polaires.

d) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss G.

- Aire contenue par une ellipse

On se donne $a > 0,$ $b > 0$ et on note E le disque elliptique bordé par l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$. Grâce au changement de variables $x = a\, r \cos\theta,$ $y = b\, r \sin\theta,$ calculer l'aire de E.

- Intégrale double [novembre 2012]

Soit D le disque de centre l'origine et de rayon 1 : $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. On pose $g(x,\, y) = \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right)^{3/4}$.

a) L'intégrale double $I = \iint_D g(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est-elle un nombre réel ?

b) Justifier avec soin votre réponse.

c) Si la réponse à la question a) est "oui", calculer la valeur de l'intégrale I.

- Intégrale double [novembre 2013]

Soit D le domaine du plan défini par $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \geq 1\}$. On pose $f(x,\, y) = \frac{x\, y}{(x^2+y^2)^{\alpha}}$. On cherche à déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles l'intégrale double $I = \iint_D f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est un nombre réel puis à calculer cette intégrale.

a) Dessiner le domaine D.

On passe en coordonnées polaires et on pose $x = r \cos\theta,$ $y = r \sin\theta$ avec $r \geq 0$.

b) Montrer que, pour tout $(x, y) \in D$, on a $|\, f(x, y) \,| \leq g(r, \theta) \equiv r^{2-2\alpha}$.

c) Après avoir remarqué que la fonction g est positive, établir pour quelles valeurs du paramètre α l'intégrale $\iint_{r \geq 1,\, 0 \leq \theta \leq \pi/2} g(r, \theta)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$ obtenue après passage en coordonnées polaires est bien un nombre réel.

d) Dans le cas où $\iint_{r \geq 1,\, 0 \leq \theta \leq \pi/2} g(r, \theta)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$ est un nombre réel, calculer l'intégrale I en fonction de α.

• Intégrales doubles [novembre 2014]

Soit T le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation
$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

a) Dessiner le triangle T.

Calculer les cinq intégrales doubles suivantes :

b) $I_1 = \iint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

c) $I_2 = \iint_T x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

d) $I_3 = \iint_T y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

e) $I_4 = \iint_T x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

f) $I_5 = \iint_T xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

• Intégrale double [février 2015]

On se donne un nombre réel β.

a) Pour quelles valeurs de β l'intégrale $I(\beta) = \int_0^1 \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ définit-elle un nombre réel ?

b) Calculer le nombre $I(\beta)$ dans un tel cas.

Dans la suite de l'exercice, on considère le disque
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ et on se donne un nombre α. On pose aussi $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

c) En passant en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$), montrer qu'on a la majoration $|f(x,y)| \leq g(r)$, avec $g(r) = \frac{1}{r^{2\alpha-4}}$.

d) A l'aide du théorème de Tonnelli et en passant en coordonnées polaires, montrer que l'intégrale double de la fonction g sur le disque D est finie si et seulement si $\alpha < 3$.

e) Démontrer que $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$.

f) Si $\alpha < 3$, calculer l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

• Intégrales doubles [novembre 2016]

Soit T le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation
$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$.

a) Dessiner le triangle T.

Calculer les cinq intégrales doubles suivantes :

b) $I_1 = \iint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

c) $I_2 = \iint_T x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

d) $I_3 = \iint_T y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

e) $I_4 = \iint_T x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

f) $I_5 = \iint_T xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.