le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 14 Transformée en z

- Introduction

On se donne un signal discret $x \in X_a$ qu'on peut écrire sous la forme $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{n\,a}$. On cherche comment écrire sa transformée de Fourier $\widehat{x}$. Par linéarité, il suffit de connaître la valeur de $\widehat{\delta_{n\,a}}$. Or on sait que de façon générale, on a $\widehat{\delta_\alpha}(\omega) = \exp(-i\,\alpha\,\omega)$. On en déduit que $\widehat{x}$ peut s'expliciter sous la forme $\widehat{x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \exp(-i\,n\,a\,\omega)$, expression que l'on peut écrire également $\widehat{x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \,\big(\exp(i\,a\,\omega)\big)^{-n}$. Si on ne contraint plus le nombre complexe $z = \exp(i\,a\,\omega)$ à rester sur le cercle unité, on obtient la définition qui suit.

- Définition de la transformée en z

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et un signal discret $x \in X_a$ de la forme $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{n\,a}$. La transformée en z du signal x, notée $X(z)$, est par définition la série double (ou série de Laurent) $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, z^{-n}$. C'est une fonction de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$.
Si $x = \delta$, masse de Dirac en zéro, on a $X(z) = 1$ et si $x = \delta_a$, masse de Dirac en a, on a $X(z) = \frac{1}{z}$.

- Transformée en z et transformée de Fourier

Si le signal x est de la forme $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{n\,a}$, la transformée de Fourier $\widehat{x}$ est reliée à la transformée en z, notée $X(z)$, par la relation $\widehat{x}(\omega) = X\big(\exp(i\,a\,\omega)\big)$. La transformée en z permet d'étendre et modifier le domaine de définition de la transformée de Fourier dans le cas des signaux discrets.

- Rappel sur les séries géométriques

Si q désigne un nombre complexe, il est supposé bien connu ici que la série géométrique $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \ldots$ est convergente si et seulement si le module du nombre complexe q est strictement inférieur à 1. Dans ce cas, sa somme vaut $\frac{1}{1-q}$. On a :
$\Big(1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\Big) \iff \Big(|q| < 1\Big)$.

- Signal de Heaviside discret

Le signal de Heaviside discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, \delta_{n\,a}$ est obtenu en discrétisant la fonction de Heaviside avec la grille temporelle de pas a : $y_n = 0$ si $n \leq -1$ et $y_n = 1$ si $n \geq 0$. On peut écrire aussi $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{n\,a}$.
La transformée en z du signal de Heaviside discret s'évalue sans difficulté particulière. La série $Y(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \ldots$ converge si et seulement si $|z| > 1$ et on a alors $Y(z) = \frac{z}{z-1}$ [exercice !].

François Dubois, janvier 2021.

- Notion de couronne de convergence

On se donne deux nombres réels α et β de sorte que $0 < \alpha < \beta$. On définit un signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{n\,a}$ par les relations $x_n = \alpha^n$ si $n \geq 0$ et $x_n = \beta^n$ si $n \leq -1$. Alors la transformée $X(z)$ converge si et seulement si le nombre complexe z appartient à la couronne définie par $\alpha < |z| < \beta$. En effet, la série géométrique qui correspond aux indices positifs converge si et seulement si $|\alpha/z| < 1$ et la série géométrique qui correspond aux indices négatifs converge si et seulement si $|z/\beta| < 1$.
L'exemple proposé ci-dessus est caractéristique de la situation générale. Une série de Laurent $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \frac{1}{z^n}$ converge en général dans une couronne de la forme $0 \leq r < |z| < R$. On a $r = \alpha$ et $R = \beta$ dans l'exemple précédent.

- Signal discret causal tempéré

On peut préciser quelques éléments sur la convergence de la transformée $X(z)$ si le signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{n\,a}$ est causal (les coefficients x_n sont nuls si $n \leq -1$) et s'il est tempéré, c'est à dire si x_n ne croît pas plus vite qu'une fonction puissance si n tend vers $+\infty$:
$\exists\, C \geq 0$, $\exists\, K \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ assez grand, $|x_n| \leq C\, n^K$. Alors la transformée $X(z)$ converge dès que $|z| > 1$ et on a $R = \infty$.

- Transformée en z d'un produit de convolution

On retrouve pour la transformée en z une propriété déjà vue pour la transformée de Laplace et la transformée de Fourier : un produit de convolution se transforme en un produit ordinaire.
On se donne deux signaux discrets $h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_\ell \, \delta_{\ell\, a}$ et $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{n\,a}$. On suppose que le produit de convolution $y = h * x$ est bien défini. En particulier, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la série de terme général $\big(h_\ell \, x_{k-\ell}\big)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ est absolument convergente. Ceci permet de définir le k^{o} coefficient du produit de convolution $h * x$: $\big(h * x\big)_k = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} h_\ell \, x_{k-\ell}$. On a alors la relation $Y(z) = H(z) X(z)$ entre les transformées en z des trois signaux discrets x, h et y, notées respectivement X, H et Y.

- Opérateur de translation temporelle

On rappelle que le filtre discret τ_a de translation temporelle associe au signal discret x un signal de sortie $y = \tau_a x$ qui est donné à l'aide de la réponse impulsionnelle δ_a: $y = \delta_a * x$. Alors $Y(z) = \frac{1}{z} X(z)$.

- Inversion de la transformée en z

Un exposé complet de ce sujet demande d'introduire les fonctions holomorphes d'une variable complexe et la formule des résidus, notions qui dépassent le cadre mathématique donné pour ce cours. Nous nous contentons d'énoncer un résultat, et renvoyons le lecteur au livre *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, de Henri Cartan (Hermann, Paris, 1961) pour les éléments fondamentaux sur les fonctions holomorphes.
On se donne une série de Laurent $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \frac{1}{z^n}$ que l'on suppose convergente dans la couronne $0 \leq r < |z| < R$ et un cercle Γ centré à l'origine et de rayon ρ tel que $r < \rho < R$. On peut calculer le coefficient x_n à partir des valeurs de la série $X(z)$ sur le cercle Γ:
$x_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma z^{n-1} X(z) \, \mathrm{d}z$.

- Stabilité ℓ^∞ d'un filtre discret

Un filtre discret T défini par sa réponse impulsionnelle h (on a donc $Tx = h * x$ pour tout signal d'entrée x) est stable pour la norme ℓ^∞ si et seulement si sa réponse impulsionnelle appartient à ℓ^1_a: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n| < \infty$. On a alors $\|Tx\|_1 \leq \|h\|_\infty \|x\|_1$. Cette condition de stabilité équivaut au fait que la couronne de convergence $\{z \in \mathbb{C}, r < |z| < R\}$ de la fonction de transfert $H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n z^{-n}$ contient le cercle unité ; on a $r < 1 < R$.

- Stabilité ℓ^∞ d'un filtre causal discret

Si, toutes choses égales par ailleurs, le filtre T est également causal, alors il est stable si et seulement si les pôles de la fonctions de transfert $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité.
Dans le cas où la fonction de transfert est une fraction rationnelle pour fixer les idées, ses pôles sont les nombes complexes z_j qui annulent le dénominateur. La condition exprime que pour tout j, on a $|z_j| < 1$.

- Filtre de réponse impulsionnelle finie

Un filtre de réponse impulsionnelle finie a une réponse impulsionnelle qui ne comporte qu'un nombre fini de termes. Donc le seul pôle éventuel est situé en $z = 0$.

- Une famille de filtres de réponse impulsionnelle infinie

Si un filtre n'est pas de réponse impulsionnelle finie, il est de réponse impulsionnelle infinie et sa réponse impulsionnelle $h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \delta_{na}$ comporte une infinité de termes non nuls.
On peut réaliser un tel filtre avec des équations aux différences linéaires à coefficients constants. On se donne par exemple des entiers p et q et des nombres a_0, a_1, $\ldots a_p$ et b_1, b_2, $\ldots b_q$ de sorte que $y_n + \sum_{k=1}^{q} b_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^{p} a_j x_{n-j}$. Si le signal d'entrée du filtre x est connu à tous les instants jusqu'au n^{o} et que la sortie y est connue à tous les temps discrets jusqu'au numéro $n-1$, la relation précédente permet d'expliciter la nouvelle valeur y_n.
La fonction de transfert $H(z)$ du filtre $y = Tx$ défini par les équations aux différences
$y_n + \sum_{k=1}^{q} b_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^{p} a_j x_{n-j}$ est donnée par la fraction rationnelle suivante :
$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{p} a_j z^{-j}}{1+\sum_{k=1}^{q} b_k z^{-k}}$.

- Filtre "RC" discret

Pour le filtre "RC" continu, la sortie y est donnée en fonction de l'entrée x par résolution de l'équation différentielle $RC \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t)$. Pour le filtre "RC" discret, on remplace cette équation continue par le schéma aux différences $RC \frac{y_n - y_{n-1}}{a} + y_n = x_n$. On laisse le lecteur calculer sa fonction de transfert, qui est une fraction rationnelle. Ce filtre est de réponse impulsionnelle infinie. Pour R, C et a positifs, si ce filtre est stable, alors il est causal [exercice !].

Exercices

- Fonctions de transfert de quelques filtes

Soit $a > 0$. On note τ_a l'opérateur de translation dans le temps défini pour un signal discret $x \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \delta_{na} \in X_a$ par la relation $(\tau_a x)_n = x_{n-1}$.

a) Calculer la fonction de transfert $H_a(z)$ de ce filtre.

b) Même question pour le filtre $x \longmapsto y$ défini par $y_n = \frac{1}{a}(x_n - x_{n-1})$.

b) Même question pour le filtre $x \longmapsto z$ défini par $z_n = \frac{1}{4} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{4} x_{n-1}$.

- Inversion de transformées en z

Soit r un nombre réel non nul et $H(z)$ la fonction de la variable complexe z définie par $H(z) = \frac{z}{z-r}$.

a) Trouver deux signaux discrets h_1 et h_2 de sorte que $H(z)$ soit la transformée en z des signaux h_1 et h_2. L'un de ces signaux est causal et l'autre non causal.

b) Reprendre la question avec la fonction $\widetilde{H}(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$.

- Stabilité

Soit $H(z) = \frac{z}{z-r}$ la fonction de transfert des deux filtres $T_1 x = h_1 * x$ et $T_2 x = h_2 * x$ proposés à l'exercice précédent.
Etudier la stabilité ℓ^∞ de ces filtres.

- Filtre RC discret

On se donne R, C et a strictement positifs. Pour un signal causal x on définit un signal causal y par $\frac{RC}{a}(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n$.

a) Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre obtenu.

b) Montrer à l'aide du critère de placement de pôle que ce filtre est stable.

- Transformée en z [avril 2014]

On désigne par h le signal discret $h = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_a + \frac{1}{8}\delta_{2a} + \frac{1}{8}\delta_{3a} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} h_k \, \delta_{ka}$.

a) Que valent les coefficients h_k ?

b) Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \mid h_k \mid = 1$. En déduire que si x est un signal borné, alors le signal $h * x$ est également borné.

c) Le filtre discret T qui à x associe $y \equiv h * x$ est-il stable dans ℓ^∞ ?

d) Le filtre discret T est-il causal ?

e) Calculer l'expression de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T, c'est à dire la transformée en z du signal h.

f) Dans quelle région du plan complexe est-elle définie ?

g) Quel(s) est le (ou les) pôle(s) de cette fonction de transfert ?

h) La position du (des) pôle(s) dans le plan complexe est-elle cohérente avec les résultats précédents ?

- Signaux discrets et transformée en z [février 2014]

Pour un nombre réel α arbitraire, δ_α représente la masse de Dirac au point α. Par ailleurs, a est un nombre réel fixé strictement positif. On introduit le filtre T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{ka}$ associe le signal discret $y = T x$, $y \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k \, \delta_{ka}$ avec
$y_k = \frac{3}{2a} x_k - \frac{2}{a} x_{k-1} + \frac{1}{2a} x_{k-2}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

a) Le filtre T est-il causal ?

b) Quelle est la réponse impulsionnelle $h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \, \delta_{ka}$ du filtre T ?

c) Calculer la transformée en z $H(z)$ de la réponse impulsionnelle h introduite à la question précédente.

d) On introduit les tranformées en z $X(z)$ et $Y(z)$ des signaux x et y tels que $y = T x$.

e) Calculer $Y(z)$ en fonction de $X(z)$.

f) Que vaut le rapport $Y(z)/X(z)$?

g) Pouvait-on prévoir le résultat ?

h) Le filtre T est-il stable ?

- Signaux discrets et transformée en z [février 2015]

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et le signal discret
$h \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \, \delta_{ka}$ tel que $h = \frac{1}{2}\,\delta_{2a} + \frac{1}{4}\,\delta_{4a} + \cdots + \frac{1}{2^k}\,\delta_{2ka} + \ldots$.

a) Que vaut le coefficient h_k en fonction de l'entier k ?

b) Montrer que le signal h est causal et appartient à l'espace ℓ^1_a.

c) Que vaut $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h_k|$?

On introduit la transformée en z, notée $H(z)$, du signal h défini en préambule de cet exercice.

d) Pour quelles valeurs du nombre complexe z cette fonction est-elle *a priori* définie ?

e) Calculer l'expression analytique de $H(z)$ dans ce cas.

f) Préciser ses pôles, c'est à dire les valeurs du nombre complexe z qui annulent le dénominateur de $H(z)$.

On introduit le filtre T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \, \delta_{ka}$ associe le signal discret $y = h * x$.

g) Le filtre T est-il causal ?

h) Est-il stable ? Justifier avec soin votre réponse.

- Fonction de transfert [février 2016]

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$, un nombre réel α strictement positif et la fonction suivante $H(z)$ de la variable complexe z définie par une série: $H(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^{\ell}$.

a) Pour quelles valeurs de z la série $H(z)$ est-elle convergente ?

b) Montrer que la fonction $H(z)$ est une fonction de transfert d'un filtre linéaire U qui transforme un signal discret $x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j \, \delta_{ja}$ en un signal discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, \delta_{na}$.

c) Préciser la réponse impulsionnelle du filtre U ainsi défini.

d) Comment calculer les valeurs de y_n en fonction de l'ensemble des nombres x_j pour j entier positif ou négatif ?

e) A quelle condition sur le paramètre α le filtre U est-il stable ?

- Signal discret [février 2017]

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et un signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{na}$ que l'on suppose borné : il existe un nombre positif ou nul $||x||_\infty$ qui dépend de x tel que pour tout entier n, $|x_n| \leq ||x||_\infty$.

a) Montrer que pour tout entier n, le nombre $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, x_{n-k}$ c'est à dire
$y_n = x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{4} x_{n-2} + \cdots + \frac{1}{2^k} x_{n-k} + \ldots$ est bien défini.

On désigne par y le signal discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, \delta_{na}$ avec y_n défini au point précédent.

b) Montrer qu'on a la relation $y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{2} y_n$.

On appelle T le filtre qui à tout signal borné x associe le signal y défini ci-dessus.

c) Ce filtre est-il causal ?

d) Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T ? On pourra introduire les transformées en z $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \frac{1}{z^n}$ et

$Y(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \frac{1}{z^n}$ des signaux d'entrée x et de sortie y du filtre T et utiliser la relation établie à la question b).

e) Quelle est la réponse impulsionnelle $h = T\,\delta$ du filtre T ?

f) Démontrer que le filtre T est stable.

• Signal discret [avril 2017]

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et un signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{na}$ que l'on suppose borné : il existe un nombre positif ou nul $||x||_\infty$ qui dépend de x tel que pour tout entier n, $|x_n| \leq ||x||_\infty$.

a) Montrer que pour tout entier n, le nombre
$y_n = \frac{1}{a}\left(\frac{3}{2} x_n - 2 x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-2}\right)$ est bien défini.

On appelle T le filtre qui à tout signal borné x associe le signal y défini ci-dessus.

b) Ce filtre est-il causal ?

c) Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T ? On pourra introduire les transformées en z des signaux d'entrée x et de sortie y du filtre T.

d) Quelle est la réponse impulsionnelle $h = T\,\delta$ du filtre T ?

e) Démontrer que le filtre T est stable.