le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal (MAA107)

Devoir 2, à rendre pour la séance numéro 7, mardi 03 novembre 2020

Exercice 1) Série de Fourier

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de période $2\,\pi$ définie par $f(x) = x^2$ si $x \in [-\pi,\, \pi]$.

a) Montrer que la fonction f est paire.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

c) Calculer les coefficients de Fourier a_k et b_ℓ de la fonction f pour k entier positif et ℓ entier supérieur ou égal à 1.

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on note $S_n(f)$ le polynôme trigonométrique défini par $\big(S_n(f)\big)(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \cos(k\,t) + \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell\, \sin(\ell\,t)$. On admet dans la suite que pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, la série numérique $\big(S_n(f)\big)(t)$ converge vers le nombre $f(t)$.

d) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{n}\big)^2$.

e) Que vaut la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$?

f) Démontrer que $f \in \mathrm{L}^2(-\pi,\, \pi)$.

g) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{n}\big)^4$.

Exercice 2) Produit de convolution et équation différentielle

On se donne deux réels $0 < a < b$. On pose $f(t) = \exp(-t\,a)\, H(t)$ où H est la fonction de Heaviside définie par $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. On pose aussi $g(t) = \exp(-t\,b)\, H(t)$.

a) Calculer le produit de convolution $f * g$ et représenter graphiquement cette fonction.

b) Même question pour $f * f$ qui correspond au cas $b = a$.

c) En déduire la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\,y = 5\exp(-t\,a)$ avec la condition initiale $y(0) = 11$.

d) Vérifier que la fonction $y(t)$ trouvée à la question précédente est bien solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\,y = 5\exp(-t\,a)$ avec la condition initiale $y(0) = 11$.

François Dubois, 20 octobre 2020.