Département de Mathématiques et Statistiques

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal (MAA107)

Devoir 4, à rendre pour la séance numéro 13, mardi 15 décembre 2020

Exercice 1) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction périodique de période 2π définie par $f(t) = |t|$ si $-\pi \leq t \leq \pi$.

a) Calculer sa dérivée f' première au sens des distributions.

b) La distribution f' est-elle une fonction ? Justifier votre réponse.

c) Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f au sens des distributions.

d) On désigne par $H(t)$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. On pose $g(t) = H(t)\,\exp(-2\,t)$. La fonction g est-elle continue ? Est-elle causale ?

e) Calculer, en justifiant votre réponse, la distribution $K = g' + 2\,g(t)$.

Exercice 2) Dérivée du logarithme au sens des distributions

On rappelle que la valeur principale de Cauchy est définie par
$< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,,\,\varphi > \equiv \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \,+\, \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que cette limite existe bien et que l'on a $< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,,\,\varphi > = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la fonction f définie par $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \log(|t|) \in \mathbb{R}$ peut être identifiée à une distribution sur $\mathbb{R}$. On montrera que l'intégrale $< f,\,\varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t$ est bien définie pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

c) Calculer la dérivée f' de la fonction f au sens des distributions.

Exercice 3) Convolution de distributions classiques

On se donne deux distributions T et U et une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

a) Rappeler les trois étapes de l'algorithme vu en cours afin de calculer le produit de convolution $T * U$ contre la fonction test φ.

b) Si $T = \delta_a$, masse de Dirac au point $a \in \mathbb{R}$ et $U = \delta_b$, expliciter la distribution $T * U$.

c) Rappeler quelle est l'action de la distribution δ' sur une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

d) Calculer le produit de convolution $\delta' * \delta'$.

e) On se donne deux nombres réels a et b. On rappellle que $\delta'_a = (\delta_a)'$; on a une relation analogue pour δ'_b. Calculer le produit de convolution $\delta'_a * \delta'_b$.

François Dubois, 01 décembre 2020.