le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 1 Remise en forme

- Fonction exponentielle

Elle est définie dans un premier temps comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et satisfait aux conditions $\exp(0) = 1$ et $\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$ pour tous les nombres réels x et y.
De plus, $\exp(x) > 0$ pour tout nombre réel x.
La fonction exponentielle est étendue au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. En particulier, pour deux nombres complexes z et z' arbitraires : $\exp(z+z') = \exp(z)\,\exp(z')$.

- Trigonométrie

Les formules d'Euler relient l'exponentielle complexe et les fonctions circulaires sinus et cosinus : $\exp(i\,\theta) \equiv \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Alors la relation $\exp\big(i\,(\theta+\varphi)\big) = \exp(i\,\theta)\,\exp(i\,\varphi)$ peut se lire sur les fonctions trigonométriques : $\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\,\cos(\varphi) - \sin(\theta)\,\sin(\varphi)$ et $\sin(\theta+\varphi) = \sin(\theta)\,\cos(\varphi) + \cos(\theta)\,\sin(\varphi)$.
On a aussi la relation fondamentale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour tout nombre θ.

- Dérivation des fonctions composées

Si $y = f(x)$ définit une première application dérivable de la variable réelle x et $z = g(y)$ une seconde application dérivable, on peut composer ces deux fonctions : $z = g\big(f(x)\big) \equiv \big(g_\circ f\big)(x)$.
Alors la fonction composée $g_\circ f$ est dérivable et $(g_\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\,f'(x)$. On écrit en pratique cette relation sous la forme $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

- Dérivée de la fonction exponentielle

On admet que la fonction exponentielle est dérivable et qu'on a en particulier $\exp'(0) = 1$. On peut alors établir une relation fondamentale $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(x)\big) = \exp(x)$: la fonction exponentielle est sa propre dérivée.

- Dérivée des fonctions circulaires

Par composition des dérivées, on a aussi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(ax)\big) = a\exp(ax)$. Si on applique ce résultat avec $a = i$, on en déduit les dérivées des fonctions circulaires : $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

- Dérivation de la fonction réciproque

On se donne une fonction $y = f(x)$ définie sur un intervalle. On suppose f bijective : pour tout y, il existe un unique x de sorte que $f(x) = y$. L'application qui à y associe cet unique x est appelée fonction réciproque de f ; elle est notée $x = \big(f^{-1}\big)(y)$. On suppose de plus la fonction f dérivable, avec $f'(x)$ qui ne s'annule jamais. Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable et on a $\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1})(y)} = \frac{1}{f'(x)}$. On écrit aussi cette relation sous la forme : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.

François Dubois, septembre 2022.

La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0, \infty[$ des nombres strictement positifs. Sa dérivée n'est jamais nulle. La fonction réciproque de la fonction exponentielle s'appelle le logarithme. Nous le notons $\log$. La fonction logarithme est une bijection de l'intervalle $]0, \infty[$ sur l'ensemble des nombres réels. On a alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\log(x)\big) = \frac{1}{x}$ si x est un nombre réel strictement positif.
La fonction sinus est une bijection de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. sur l'intervalle $[-1, 1]$. La bijection réciproque s'appelle "arc sinus" et se note arcsin. Comme la dérivée du sinus est nulle en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on ne peut rien dire de la dérivabilité de la fonction réciproque aux points -1 et $+1$.

- Théorème fondamental de l'Analyse

On se donne une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction qui, à tout nombre réel x, associe l'intégrale $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\big) = f(x)$.
On déduit de cette relation le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive F de f. Avec $F' \equiv f$, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. En particulier, $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.
La preuve de cette relation consiste à remarquer que la fonction $x \longmapsto F(x) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une dérivée égale à zéro, donc est constante sur l'intervalle $[a, b]$. On a donc en prenant successivement $x = a$ et $x = b$, $F(a) - 0 = F(b) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui montre le résultat.

- Intégration par parties

On utilise la relation précédente avec $f(x) \equiv u(x)\,v(x)$. La règle de Leiniz de dérivation d'un produit s'écrit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(u(x)\,v(x)\big) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,v(x) + u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. On en déduit la formule d'intégration par parties : $\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$.

- Intégrales impropres classiques

On se donne un nombre réel α. L'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ peut être définie comme la limite de l'intégrale $\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ si A tend vers l'infini si et seulement si $\alpha > 1$. On dit dans ce cas que l'intégrale impropre converge et on a $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$. Si $\alpha \leq 1$, la limite de $\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ vaut $+\infty$ si A tend vers l'infini et on dit que l'intégrale impropre diverge.
De façon analogue, l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ peut être définie comme la limite de l'intégrale $\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ si ε tend vers zéro. Cette limite existe et est un nombre réel si et seulement si $\alpha < 1$ et dans ce cas, l'intégrale converge et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$. Dans le cas $\alpha \geq 1$, $\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ tend vers $+\infty$ si le paramètre ε tend vers zéro et l'intégrale diverge.

- Principe de comparaison.

On se donne un intervalle I et deux fonctions f et g de I dans $\mathbb{R}$ de sorte que pour tout $x \in I$, on a $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$. De plus, on suppose que l'intégrale $\int_I g(x)\,\mathrm{d}x$ de la fonction positive g est convergente, c'est à dire représente bien un nombre réel positif. Alors l'intégrale $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et représente bien un nombre réel qui peut être positif ou négatif. On dit que l'intégale $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Exercices

• Exponentielle

A partir de la relation générale $\exp(x+y) = (\exp x)\,(\exp y)$, montrer qu'on a $\exp(0) = 1$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

• Trigonométrie

Etablir les relations suivantes

a) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ et $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$,

b) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ et $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

• Logarithme

A partir de la dérivée d'une fonction réciproque, montrer que l'on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x}$.

• Fonction réciproque de la fonction cosinus

Montrer la relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Arccos}\, x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

• Intégration par parties

On désigne par k un entier supérieur ou égal à 1. Etablir les relations $\int_0^1 \theta\cos\big(2k\pi\theta\big)\mathrm{d}\theta = 0$ et $\int_0^1 \theta\sin\big(2k\pi\theta\big)\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2k\pi}$.

• Changement de variables dans une intégrale

Montrer qu'on a les égalités suivantes

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

• Une intégrale généralisée classique

a) Montrer que la fonction tangente réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On appele arc tangente la fonction réciproque et on la note atan.

b) Quellle est la dérivée de la fonction arc tangente ?

c) Montrer que l'intégrale $I \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ est convergente.

d) Montrer que le nombre I est égal à π.

• Formule de Taylor avec reste intégral

On se donne une fonction deux fois dérivable $\varphi\colon\ [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties qu'on a la relation

$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\,\varphi''(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer à l'aide d'une nouvelle intégration par parties à partir de la relation de la question a) que l'on a

$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2\,\varphi'''(t)\,\mathrm{d}t$.

On se donne maintenant deux réels $a < b$ et une fonction trois fois dérivable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose $h \equiv b-a$ et pour $0 \leq t \leq 1$, $\varphi(t) = f(a+t\,h)$.

c) Calculer $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ et $\varphi'''(t)$ en fonction de la fonction f et de ses dérivées.

d) Que valent en particulier $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$?

e) Etablir une formule de Taylor pour f avec reste intégral :

$f(b) = f(a) + f'(a)\,h + \frac{1}{2}f''(a)\,h^2 + \frac{h^3}{2}R(a,b\,;f)$.

f) Donner une expression exacte du terme $R(a,b\,;f)$ présent dans le "reste" de la relation établie à la question e) en fonction de la dérivée troisième de la fonction f.