le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 3 Séries de Fourier

- Polynôme trigonométrique

Dans tout ce cours, on se fixe la période $T > 0$ du phénomène à étudier. On se donne aussi un entier $N \geq 1$, une famille de $2N+1$ réels (ou de complexes) α_k pour $0 \leq k \leq N$ et β_k pour $1 \leq k \leq N$. Un polynome trigonométrique est une fonction g périodique et de période T de la forme $g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N} \big(\alpha_k \cos\big(\frac{2k\pi}{T}\, t\big) + \beta_k \sin\big(\frac{2k\pi}{T}\, t\big)\big)$.

- Calcul des coefficients

On a $\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t$ et si $k \geq 1$, $\alpha_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(kt)\,\mathrm{d}t$ et $\beta_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(kt)\,\mathrm{d}t$. Ce calcul, assez long, demande l'évaluation des intégrales $I_{k\ell}^{\mathrm{cc}} \equiv \int_0^T \cos\big(\frac{2k\pi}{T}\, t\big) \cos\big(\frac{2\ell\pi}{T}\, t\big)\,\mathrm{d}t$, $I_{k\ell}^{\mathrm{sc}} \equiv \int_0^T \sin\big(\frac{2k\pi}{T}\, t\big) \cos\big(\frac{2\ell\pi}{T}\, t\big)\,\mathrm{d}t$ et $I_{k\ell}^{\mathrm{ss}} \equiv \int_0^T \sin\big(\frac{2k\pi}{T}\, t\big) \sin\big(\frac{2\ell\pi}{T}\, t\big)\,\mathrm{d}t$. On a $I_{k\ell}^{\mathrm{cc}} = I_{k\ell}^{\mathrm{sc}} = I_{k\ell}^{\mathrm{ss}} = 0$ si $k \neq \ell$. De plus, on a $I_{kk}^{\mathrm{cc}} = I_{kk}^{\mathrm{ss}} = T$ et $I_{kk}^{\mathrm{sc}} = 0$.

Notons que, dans les expressions précédentes, on peut remplacer toutes les intégrales entre 0 et T par des intégrales entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$ puisque la fonction g est périodique de période T.

- Parité

Un polynôme trigonométrique pair n'a que des termes en cosinus et un polynôme trigonométrique impair n'a que des termes en sinus. Le polynôme trigonométrique $g(t)$ est une fonction paire [respectivement impaire] de la variable t si et seulement si $\beta_k = 0$ [respectivement $\alpha_k = 0$] pour tout k.

- Ecriture complexe d'un polynôme trigonométrique

On introduit une notation spécifique pour l'exponentielle complexe : $\mathrm{e}_k(t) \equiv \exp\big(\frac{2ik\pi}{T}\, t\big)$. Un polynôme trigonométrique g peut aussi s'écrire $g(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k\, \mathrm{e}_k(t)$.

On a les relations suivantes entre les coefficients : $a_0 = \alpha_0$ et si $k \geq 1$, $a_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - i\,\beta_k)$, $a_{-k} = \frac{1}{2}(\alpha_k + i\,\beta_k)$. Les coefficients a_k pour k entier tel que $-N \leq k \leq N$ s'obtiennent *via* la relation $a_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \exp(-ikt)\,\mathrm{d}t$.

- Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodique de période T : $f(t+T) = f(t)$ pour tout nombre réel t. Les coefficients de Fourier $\alpha_k(f)$ et $\beta_k(f)$ sont définis par $\alpha_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ et si $k \geq 1$, $\alpha_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\big(\frac{2k\pi}{T}\, t\big)\big)\,\mathrm{d}t$ et
$\beta_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\big(\frac{2k\pi}{T}\, t\big)\big)\,\mathrm{d}t$.

- Série de Fourier d'une fonction périodique

Avec les hypothèses précédentes, on se donne un entier $N \geq 1$. On définit la somme partielle de la série de Fourier de f grâce au polynôme trigonométrique
$g_N(t) = \alpha_0(f) + \sum_{k=1}^{N} \big(\alpha_k(f) \cos\big(\frac{2k\pi}{T}\, t\big) + \beta_k(f) \sin\big(\frac{2k\pi}{T}\, t\big)\big)$.

François Dubois, octobre 2022.

- Fonctions périodiques de carré intégrable sur leur période

On se donne un nombre réel T strictement positif. Une fonction f périodique et de période T est dite de carré intégrable si et seulement si l'intégrale $\int_0^T |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$ est finie. On note alors $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$.

- Espace des fonctions de carré intégrable

L'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$ des fonctions de carré intégrable est un espace vectoriel. La somme de deux fonctions de carré intégrable est de carré intégrable et le produit d'une fonction de carré intégrable par un scalaire est encore de carré intégrable : si f et g appartiennent à $\mathrm{L}^2(0, T)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(f+g) \in \mathrm{L}^2(0, T)$ et $\lambda f \in \mathrm{L}^2(0, T)$.

- Produit scalaire

Si f et g appartiennent à $\mathrm{L}^2(0, T)$, le nombre complexe $\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ est toujours bien défini et on pose $(f\,,g) = \int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$.
On remarque que la base des exponentielles complexes définit une famille orthogonale :
$(\mathrm{e}_k\,, \mathrm{e}_\ell) = 0$ si $k \neq \ell$. De plus, $(\mathrm{e}_k\,, \mathrm{e}_k) = T$.

- Quelques propriétés du produit scalaire

Pour f, g, h appartenant à $\mathrm{L}^2(0, T)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $(f+g\,,h) = (f\,,h) + (g\,,h)$, $(f\,,g+h) = (f\,,g) + (f\,,h)$, $(\lambda f\,,g) = \lambda\,(f\,,g)$, $(f\,,\lambda g) = \overline{\lambda}\,(f\,,g)$, $(g\,,f) = \overline{(f\,,g)}$. De plus, $(f\,,f) \geq 0$ et si $(f\,,f) = 0$, alors la fonction f est (essentiellement) nulle.

- Norme

Pour $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$, on pose $\| f \| = \sqrt{(f\,,f)} = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$. L'application de $\mathrm{L}^2(0, T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathrm{L}^2(0, T) \ni f \longmapsto \| f \| \in \mathbb{R}$ est une norme sur l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$. La norme est positive : $\| f \| \geq 0$. Si $\| f \| = 0$, alors $f = 0$. Si λ est un nombre complexe et si $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$, alors $\| \lambda f \| = |\lambda| \, \| f \|$. Enfin, pour f et g dans l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$, on a l'inégalité triangulaire $\| f+g \| \leq \| f \| + \| g \|$.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour f et g dans l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$, on a $|(f\,,g)| \leq \| f \| \, \| g \|$. De plus, si on est dans le cas d'égalité, c'est à dire si $|(f\,,g)| = \| f \| \, \| g \|$, alors les deux fonctions f et g sont proportionnelles : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de sorte que pour tout $t \in [0, T]$, $f(t) = \lambda\, g(t)$.

- Théorème de Pythagore

Si $(f\,,g) = 0$, alors $\| f+g \|^2 = \| f \|^2 + \| g \|^2$.

- Sous-espace des polynômes trigonométriques de degré donné

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 0. On note E_N le sous-espace de $\mathrm{L}^2(0, T)$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N. Une fonction $g_N(t)$ qui appartient à E_N s'écrit de façon unique sous la forme $g_N(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k\, \mathrm{e}_k(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \exp\!\Big(\frac{2ik\pi t}{T}\Big)$, où les coefficients a_k $(-N \leq k \leq N)$ forment une famille de $(2N+1)$ nombres complexes indépendants.

- Projecteur sur les polynômes trigonométriques de degré donné

Si $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$, il existe un unique polynôme trigonométrique $S_N(f) \in E_N$ de sorte que pour tout $g \in E_N$, $(f - S_N(f)\,,g) = 0$. On a $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k(f)\, \mathrm{e}_k$ où les nombres $a_k(f)$ sont les

coefficients de Fourier de la fonction f : $a_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\big(-\frac{2ik\pi t}{T}\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}(f\,,\mathrm{e}_k)$.
On remarque que les coefficients de Fourier $a_k(f)$ ne dépendent pas de l'indice N de l'espace E_N.

- Inégalité de Bessel-Parseval

Pour $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$ et $S_N(f) \in E_N$ défini au point précédent, on a l'inégalité $\| S_N(f) \| \leq \| f \|$, c'est à dire $\sum_{|k|\leq N} |a_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.
La série de terme général $|a_k|^2$ (indexée par $k \in \mathbb{Z}$) converge et on a en passant à la limite dans l'inégalité précédente : $\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.

- Théorème de Parseval

Soit $T > 0$ et $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$. La suite de fonctions $S_N(f)$ converge vers f dans l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$: $\| S_N(f) - f \|$ tend vers 0 si l'entier N tend vers l'infini. On peut alors écrire : $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k$ qui signifie que la norme de la différence $\big(f - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k\big)$ est nulle. En pratique, on peut écrire, pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^2(0,T)$, l'égalité des produits scalaires : $(f\,,g) = (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k\,,g)$. En particulier, les deux fonctions f et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k$ ont même norme et on a l'égalité de Bessel-Parseval : $\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.
Dans le cas où on utilise la base réelle de $\mathrm{L}^2(0,T)$ des fonctions sinus et cosinus et les coefficients $\alpha_k(f)$ et $\beta_k(f)$ introduits plus hauts, l'égalité de Bessel-Parseval prend la forme
$|\alpha_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\big(|\alpha_k(f)|^2 + |\beta_k(f)|^2\big) = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.

Exercices

- Coefficients de Fourier

Soit g un polynome trigonométrique de la forme
$g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N}\big[\alpha_k \cos\big(2k\pi\frac{t}{T}\big) + \beta_k \sin\big(2k\pi\frac{t}{T}\big)\big]$. Montrer que le coefficient de Fourier β_k est donné par la relation $\beta_k = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin\big(2k\pi\frac{t}{T}\big)\,\mathrm{d}t$.

- Fonction périodique en dent de scie

On se donne $T > 0$. La "dent de scie" est une fonction f périodique de période T, discontinue pour les valeurs de la forme kT avec k entier, affine sur l'intervalle $]0,T[$ où l'on a $f(t) = \frac{t}{T}$.
a) Dessiner le graphe de la fonction f.
b) Montrer que $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$ et calculer $\| f \|$.
c) Montrer que le développement en série de Fourier de la fonction f s'exprime sous la forme $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\sin\big(2k\pi\frac{t}{T}\big)$.
d) Que peut-on dire de la convergence ponctuelle de la série de Fourier ainsi obtenue ?
e) En utilisant l'égalité de Parseval, établir la somme classique $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Transformée de Fourier de la corde pincée

Soit β un réel non nul.
a) Montrer qu'on a la relation suivante
$\int_0^1 \theta\exp(i\beta\,\theta)\,\mathrm{d}\theta = \big[\frac{1}{\beta^2}(\cos\beta - 1) + \frac{1}{\beta}\sin\beta\big] + i\big[\frac{1}{\beta^2}\sin\beta - \frac{1}{\beta}\cos\beta\big]$.
On se donne α de sorte que $0 < \alpha < 1$. On définit la "corde pincée" comme la fonction c périodique de période 1, continue sur $\mathbb{R}$, affine sur les intervalles $[0,\alpha]$ et $[\alpha,1]$ de sorte que $c(0) = c(1) = 0$ et $c(\alpha) = 1$.

b) Vérifier que $c(\theta) = \min\left(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{1-\theta}{1-\alpha}\right)$.
c) En déduire de la relation proposée en a) que le développement en série de Fourier de la corde pincée est donné par la relation
$c(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,\alpha\,(1-\alpha)\,\pi^2} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} \left[\left(\cos(2k\pi\alpha) - 1\right) \cos(2k\pi\theta) + \sin(2k\pi\alpha) \sin(2k\pi\theta)\right]$.

- Théorème de Parseval

On approche un signal f périodique de période T et d'énergie finie, c'est à dire une fonction $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$ de carré intégrable, par une série de Fourier à l'aide d'une relation de la forme
$f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \cos\left(2\,k\,\pi \frac{t}{T}\right) + \beta_k \sin\left(2\,k\,\pi \frac{t}{T}\right)\right]$.
Montrer qu'on a l'égalité suivante, dite de Parseval :
$\alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k\geq 1} \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) = \frac{1}{T} \int_0^T |\,f\,|^2 \,\mathrm{d}t$.

- Convergence d'une série de Fourier

On se donne une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la série associée $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\,\alpha_k\,|$ converge.
a) Montrer à l'aide du critère de Cauchy que la suite de fonctions $S_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$ converge uniformément vers une fonction qu'on notera f.
b) En déduire que dans ce cas, la somme f de la série de Fourier est une fonction continue du temps.

- Série de Fourier [novembre 2012]

a) Soit ℓ un nombre entier. Montrer que l'on a
$\int_0^{\pi} \left(\sin t\right) \left(\cos(2\ell+1)t\right) \mathrm{d}t = 0$.
On se donne la fonction périodique f de période π égale à $\sin t$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.
b) Démontrer que $f(t) = |\sin t\,|$ pour tout réel t.
c) En déduire que f est paire.
d) Déduire des questions précédentes que le développement en série de Fourier de f est de la forme $f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \cos(2\,k\,t)$.
e) Calculer les coefficients de Fourier α_k introduits à la question précédente.

- Séries de Fourier [février 2014]

On se donne T réel strictement positif, ε tel que $0 < \varepsilon < T$ et a et b deux nombres réels quelconques. On définit une fonction f périodique de période T de la façon suivante : $f(t) = a$ si $0 \leq t < \varepsilon$, $f(t) = b$ si $\varepsilon \leq t < T$.
a) Dessiner le graphe de la fonction f dans le cas particulier où $T = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $a = 1$ et $b = -1$.
b) Si $a = b$, que peut-on dire de la fonction f ?
c) Quel est le développement de la fonction f en série de Fourier si $a = b$?
d) Dans le cas général où $a \neq b$, calculer le développement en série de Fourier de la fonction f ; on explicitera les coefficients a_k et b_k de sorte que
$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$.
e) Que valent les coefficients a_k et b_k si $a = b$?
f) Pouvait-on prévoir le résultat ?

- Série de Fourier [novembre 2014]

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = |\cos t|$.

a) Montrer que f est périodique et que $f(t+\pi) = f(t)$ pour tout nombre réel t.

b) Calculer l'intégrale $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \mathrm{d}t$.

c) On se donne un entier naturel k supérieur ou égal à 1. Calculer l'intégrale $J_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos\big(2kt\big) \mathrm{d}t$.

d) Pourquoi les intégrales $L_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin\big(2kt\big) \mathrm{d}t$ sont-elles nulles pour tout entier k ?

e) Déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de la fonction f.

f) Appliquer le thérorème de Parseval pour calculer exactement la somme $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 (2k-1)^2}$.

- Série de Fourier [avril 2015]

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique et de période 2π définie par $f(t) = |t|$ si $-\pi \leq t \leq \pi$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) La fonction f est-elle paire ?

c) Est-elle impaire ?

d) Est-elle continue comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

e) Calculer les intégrales $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{d}t$ et $K = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t$.

f) Si k désigne un entier différent de zéro, montrer que toutes les intégrales $J_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos\big(2kt\big) \mathrm{d}t$ sont nulles.

g) On se donne un entier naturel k supérieur ou égal à 0. Calculer l'intégrale $L_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos\big((2k+1)t\big) \mathrm{d}t$.

h) Déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de f.

i) Appliquer le thérorème de Parseval pour calculer exactement la somme de la série $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

- Calcul d'une intégrale et série de Fourier [novembre 2015]

a) Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_0^1 4\,\theta\,(1-\theta)\,\mathrm{d}\theta$?

On se donne un entier k non nul.

b) Calculer la dérivée par rapport à la variable θ de la fonction $g_k(\theta) = \big[\frac{2}{ik\pi}\,\theta^2 + \big(\frac{2i}{k\pi} - \frac{2}{k^2\pi^2}\big)\,\theta + \big(\frac{i}{k^3\pi^3} + \frac{1}{k^2\pi^2}\big)\big] \exp(-2\,i\,k\,\pi\,\theta)$.

c) En déduire que l'on a $\int_0^1 4\,\theta\,(1-\theta) \exp(-2\,i\,k\,\pi\,\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{k^2\pi^2}$ si l'entier k est différent de zéro.

On se donne un nombre T stritement positif et on note f la fonction périodique de période T telle que $f(t) = 4\,\frac{t\,(T-t)}{T^2}$ si $0 \leq t \leq T$.

d) Dessiner le graphe de la fonction f.

e) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

f) Pour k entier positif, négatif ou nul, calculer le coefficient de Fourier $a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-2\,i\,k\,\pi\,t/T)\,\mathrm{d}t$ de la fonction f.

g) A l'aide du calcul précédent et de l'égalité de Bessel-Parseval, montrer que l'on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

• Série de Fourier [novembre 2016]

On considère la fonction périodique f de période 2π, paire, qui satisfait à la relation $f(x) = x$ si $x \in [0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de la fonction $y = f(x)$.

b) Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de la fonction f et montrer que $S(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{(2\ell+1)^2} \cos\big((2\ell+1)x\big)$.

c) Déduire de ce qui précède la somme $S = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}$.

d) En déduire un calcul de la somme $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

e) A l'aide de la relation de Bessel-Parseval, montrer que l'on a $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.