

## Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

### Cours 6 Intégrale double

- Introduction

On se donne une partie bornée  $\Omega$  du plan  $\mathbb{R}^2$  et une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . L'intégrale double de la fonction  $f$  dans le domaine  $\Omega$  est un nombre réel qui, quand il existe, se note  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  ou parfois  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  et souvent plus simplement  $\int_{\Omega} f dx dy$  ou même  $\int_{\Omega} f$ .

- Intégrale double de la fonction "un"

Si on prend le rectangle  $]a, b[ \times ]c, d[$  du plan  $\mathbb{R}^2$  (avec  $a < b$  et  $c < d$ ), l'intégrale double de la fonction  $f(x, y) \equiv 1$  est simplement la surface  $(b - a)(d - c)$  du rectangle :

$$\int_{]a, b[ \times ]c, d[} dx dy = (b - a)(d - c).$$

De façon générale, si  $\Omega$  désigne une partie bornée du plan, l'intégrale double sur  $\Omega$  de la fonction  $f(x, y) \equiv 1$  est la surface  $|\Omega|$  du domaine :  $\int_{\Omega} dx dy = |\Omega|$ .

- Linéarité

On suppose connue l'intégrale double  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  et on se donne un nombre  $\lambda$ . Alors  $\int_{\Omega} (\lambda f)(x, y) dx dy = \lambda \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ . Si on se donne aussi l'intégrale double  $\int_{\Omega} g(x, y) dx dy$  de la fonction  $g$ , alors  $\int_{\Omega} (f + g)(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy + \int_{\Omega} g(x, y) dx dy$ .

- Positivité

On suppose la fonction  $f$  positive sur  $\Omega$  :  $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega$ . Alors  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy \geq 0$ . Si  $f \leq g$  sur  $\Omega$  c'est à dire  $f(x, y) \leq g(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \Omega$ , alors

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy \leq \int_{\Omega} g(x, y) dx dy \text{ [exercice].}$$

- Additivité par rapport au domaine

On suppose l'ensemble  $\Omega$  borné décomposé en une réunion finie de parties  $\Omega_i$  "plus simples",  $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$  de sorte que l'intersection  $\Omega_i \cap \Omega_j$  est de surface nulle si  $i \neq j$  :  $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$ . Alors l'intégrale sur  $\Omega$  est la somme des intégrales sur chacun des morceaux  $\Omega_i$  :

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x, y) dx dy.$$

- Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de  $\Omega$  borné comme ci-dessus et une fonction  $f$  "étagée" sur  $\Omega$ , c'est à dire constante sur chacune des parties  $\Omega_i$  :  $\forall i, \exists \lambda_i, \forall (x, y) \in \Omega_i, f(x, y) = \lambda_i$ . Le calcul de l'intégrale de  $f$  sur  $\Omega$  est explicite :  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\Omega_i|$ .

- Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par  $\Omega$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^2$  et par  $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  une fonction continue sur  $\Omega$  et jusqu'au bord inclus :

$\forall X \in \overline{\Omega}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall Y \in \overline{\Omega}, |X - Y| < \eta \implies |f(X) - f(Y)| < \varepsilon$ . Alors l'intégrale de  $f$  sur  $\Omega$  est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe.

Pour établir ce résultat, on utilise l'uniforme continuité de  $f$  et on l'approche par des fonctions étagées. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $f_\varepsilon$  étagée sur  $\Omega$  de sorte que  $f_\varepsilon - \varepsilon \leq f \leq f_\varepsilon + \varepsilon$  sur  $\Omega$ .

Alors le nombre  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  satisfait nécessairement aux inégalités

$$\int_{\Omega} f_\varepsilon(x, y) dx dy - \varepsilon |\Omega| \leq \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \leq \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, y) dx dy + \varepsilon |\Omega|.$$

On montre alors d'une part que le nombre  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  est bien défini et d'autre part qu'on peut l'approcher en calculant l'intégrale d'une fonction en escalier qui approche la fonction  $f$ .

- Intégrale d'une fonction positive

On se donne  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $f$  fonction positive  $\Omega \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) \geq 0$  pour  $(x, y) \in \Omega$ . L'intégrale  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  est dans ce cas toujours bien définie, quitte à accepter la valeur  $+\infty$ . Par exemple pour  $f(x, y) \equiv 1$  et  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , on a  $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = +\infty$ . Si l'intégrale n'est pas infinie, si c'est un nombre réel positif, on écrit cette propriété sous la forme  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy < \infty$ .

- Théorème de Tonelli

On se donne une fonction positive  $f$  définie dans  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs réelles. Notons qu'on peut toujours se ramener à ce cas si  $f$  est définie de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  en supposant  $f$  nulle hors de  $\Omega$ . Pour  $x$  réel fixé on note  $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$  le nombre positif éventuellement égal à  $+\infty$  obtenu en intégrant la fonction  $f$  par rapport à la seconde variable  $y$ , en laissant la première fixée. De même, on note  $G(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$  le nombre positif au besoin égal à  $+\infty$  si l'intégrale diverge, résultat de l'intégrale de la fonction  $f$  par rapport à la première variable  $x$  en laissant la deuxième fixe. Alors les intégrales de  $F$  et  $G$  sont égales et permettent de calculer l'intégrale double de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  :  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}} G(y) dy$ .

En explicitant les valeurs des fonctions  $F$  et  $G$ , la conclusion du théorème de Tonelli s'écrit souvent sous la forme  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] = \int_{\mathbb{R}} dy \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right]$ . On peut toujours intégrer une fonction positive de deux variables dans l'ordre que l'on veut.

La relation précédente montre que si l'une des deux intégrales simples  $\int_{\mathbb{R}} F(x) dx$  ou  $\int_{\mathbb{R}} G(y) dy$  est infinie, il en est de même de l'intégrale double qui est alors infinie. Si l'une des intégrales  $\int_{\mathbb{R}} F(x) dx$  ou  $\int_{\mathbb{R}} G(y) dy$  est finie, alors c'est aussi le cas pour l'intégrale double  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ . On écrit alors  $0 \leq \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy < \infty$ .

- Exemple d'utilisation du théorème de Tonelli

On peut par exemple vérifier la conclusion du théorème de Tonelli en considérant la fonction  $f$  égale à 1 dans le demi-disque  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$  et égale à 0 ailleurs. Les deux calculs précédents de l'intégrale double de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  redonnent la surface  $|D|$  du demi-disque  $D$ , à savoir  $\frac{\pi}{2}$ .

- Théorème de Fubini

On se donne maintenant une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs réelles ou éventuellement complexes. On suppose que l'intégrale double de la fonction positive  $|f|$  est finie :

$\iint_{\Omega} |f(x, y)| dx dy < \infty$ . Alors l'intégrale double de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  est bien définie ; c'est un nombre réel ou complexe que l'on peut calculer à l'aide d'une des relations suivantes :

$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \left[ \int_{\mathbb{R}} dy f(x, y) \right]$  ou  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dy \left[ \int_{\mathbb{R}} dx f(x, y) \right]$ . Si l'intégrale double est bien définie, c'est à dire si  $\iint_{\Omega} |f(x, y)| dx dy$  est finie, on peut toujours intégrer une fonction de deux variables dans l'ordre que l'on veut.

- Une inégalité importante

On se donne  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $f$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose que la valeur absolue de  $f$  (ou le module de  $f$  si elle est à valeurs complexes) est intégrable. On sait grâce au théorème de Fubini qu'alors l'intégrale de la fonction  $f$  sur  $\Omega$  a un sens. On a de plus l'inégalité  $|\int_{\Omega} f(x, y) dx dy| \leq \int_{\Omega} |f(x, y)| dx dy$ .

- Exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On se donne deux réels  $a$  et  $b$  strictement positifs et le triangle

$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$ . On pose  $f(x, y) = x - y$ . On vérifie d'abord que l'intégrale de la fonction  $|f|$  sur le triangle  $T$  est finie puisque  $|f(x, y)| \leq a + b$  si  $(x, y) \in T$ . Donc  $\int_T |f(x, y)| dx dy \leq (a + b)|T| = (a + b) \frac{ab}{2} < \infty$  et on est dans le cadre des hypothèses du théorème de Fubini. On peut vérifier sur cet exemple [exercice !] que les deux intégrales simples successives  $\int_0^a dx [\int_0^{b(1-x/a)} dy (x - y)]$  et  $\int_0^b dy [\int_0^{a(1-y/b)} dx (x - y)]$  sont égales et valent  $\frac{ab}{6} (b - a)$ .

- Changement de variable dans une intégrale double

On se donne une transformation régulière et bijective  $F$  d'une partie  $\widehat{\Omega}$  "assez simple géométriquement" vers le domaine d'intégration  $\Omega$ :

$\widehat{\Omega} \ni (\widehat{x}, \widehat{y}) \mapsto F(\widehat{x}, \widehat{y}) \equiv (x = X(\widehat{x}, \widehat{y}), y = Y(\widehat{x}, \widehat{y})) \in \Omega$ . La régularité des fonctions  $X$  et  $Y$  permet de considérer les dérivées partielles  $\frac{\partial X}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y}), \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y}), \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y})$  et  $\frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y})$  qui sont

aussi des fonctions définies sur  $\widehat{\Omega}$ . On forme la matrice jacobienne  $J(F)(\widehat{x}, \widehat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}} \\ \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} \end{pmatrix}$ ,

son déterminant  $\det(J(F)) = \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}} \frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}} \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}$  et la valeur absolue  $|\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y})$  de ce déterminant. Alors l'intégrale d'une fonction  $f$  sur  $\Omega$  peut se calculer à l'aide d'une intégrale sur le domaine des paramètres :  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\widehat{\Omega}} f(X(\widehat{x}, \widehat{y}), Y(\widehat{x}, \widehat{y})) |\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y}) d\widehat{x} d\widehat{y}$ .

Dans la relation précédente, il est essentiel de ne pas oublier la valeur absolue du déterminant jacobien, c'est à dire le facteur  $|\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y})$ .

- Coordonnées polaires du plan

Dans ce cas, le domaine  $\widehat{\Omega}$  est noté classiquement avec les variables  $(r, \theta)$  et le changement de coordonnées  $F$  s'écrit simplement  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ . Après transformation de  $\widehat{\Omega}$  en  $\Omega$  par ce passage en coordonnées polaires, on forme le déterminant jacobien

$$J(r, \theta) \equiv \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \text{ et on a } \int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\widehat{\Omega}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

- Introduction à l'intégration par parties

La question est de généraliser aux intégrales doubles la relation  $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$  toujours vraie pour les intégrales simples dès que  $f$  est dérivable et en particulier pour  $a < b$ . Il faut voir cette relation comme une intégrale sur le bord  $\partial([a, b]) = \{a, b\}$  de l'intervalle  $]a, b[$ . On peut noter  $n_b \equiv +1$  la "normale extérieure" à l'intervalle  $]a, b[$  au point  $b$  et  $n_a \equiv -1$  la normale extérieure à cet intervalle au point  $a$ . La relation précédente s'écrit aussi

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = n_a f(a) + n_b f(b).$$

- Frontière

Si  $\Omega$  est un domaine borné du plan  $\mathbb{R}^2$ , on suppose sa frontière  $\partial\Omega$  assez régulière. La notion de bord, de frontière est assez intuitive. Par exemple, si  $\Omega$  est le disque de centre l'origine et de

rayon  $R$ , sa frontière est le cercle de centre  $O$  et de même rayon. On paramètre cette courbe  $\partial\Omega$  avec des coordonnées cartésiennes :  $x = X(t)$ ,  $y = Y(t)$ , avec  $0 \leq t \leq 1$  pour fixer les idées.

- Normale extérieure

La normale extérieure à un domaine borné  $\Omega$  du plan est un vecteur unitaire  $n(x, y)$  défini, si le bord  $\partial\Omega$  est assez régulier, pour tout point  $(x, y) \in \partial\Omega$ . Ce vecteur  $n(x, y) \equiv (n_x(x, y), n_y(x, y))$  est perpendiculaire à la direction tangente à la courbe. Avec un paramétrage  $x = X(t)$ ,  $y = Y(t)$  de  $\partial\Omega$  comme plus haut, on a  $n_x \frac{dX}{dt} + n_y \frac{dY}{dt} = 0$  en tout point du contour. De plus, la normale  $n(x, y)$  est unitaire :  $n_x(x, y)^2 + n_y(x, y)^2 \equiv 1$ , pour tout  $(x, y) \in \partial\Omega$ . Enfin, elle pointe vers l'extérieur de  $\Omega$ .

Dans le cas du disque de centre l'origine et de rayon  $R$ , la normale  $n(x, y)$  au point  $(x, y) = (R \cos \theta, R \sin \theta) \in \partial\Omega$  sur le bord s'écrit  $n(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

- Inégrale de contour

On peut intégrer une fonction  $f$  définie sur une courbe  $\Gamma$ . Afin de garantir que l'intégrale de la fonction "un" sur la courbe  $\Gamma$  est égale à la longueur  $|\Gamma|$  de cette courbe, on introduit l'abscisse curviligne  $\gamma$  telle que  $\frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2}$  et on pose

$$\int_{\Gamma} f(x, y) d\gamma = \int_0^1 f(X(t), Y(t)) \sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2} dt.$$

Dans le cas du cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , si  $\theta$  désigne l'angle polaire, on a  $d\gamma = R d\theta$  et on peut finalement écrire  $\int_{\Gamma} f(x, y) d\gamma = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) R d\theta$ . On retrouve bien que si  $f \equiv 1$ , son intégrale sur  $\Gamma$  est la longueur du cercle.

- Intégration par parties

L'intégrale double dans le domaine  $\Omega$  de la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  d'une fonction  $f$  est égale à une intégrale sur le bord  $\partial\Omega$  du domaine. De façon précise, on désigne par  $n_j(x, y)$  la composante numéro  $j$  de la normale extérieure en un point  $(x, y)$  de la frontière. On a  $\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f(x, y) n_j(x, y) d\gamma$ . On peut détailler cette relation pour chacune des deux composantes :  $\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f(x, y) n_x(x, y) d\gamma$  et  $\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f(x, y) n_y(x, y) d\gamma$ . Ces relations sont fondamentales. Entre autres pour de nombreuses applications en ingénierie.

## Exercices

- Intégrale simple et intégrale double

La plupart des propriétés de l'intégrale double ont leur équivalent pour l'intégrale simple. A partir des notes de cours, énoncer en regard de chaque propriété de l'intégrale double la propriété équivalente de l'intégrale simple.

- Utilisation du théorème de Tonelli

Soit  $D$  le demi-disque  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Calculer sa surface en utilisant les deux façons de faire que suggère le théorème de Tonelli.

MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL

- Utilisation du théorème de Fubini

Soit  $T$  le triangle  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ .

- Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale  $\int_T (x + y - \frac{1}{2}) dx dy$ .
- Calculer cette intégrale de deux façons différentes. [ $\frac{1}{4}$ ]

- Convolution dans l'espace  $L^1$

On se donne  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables c'est à dire telles que les intégrales

$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \equiv \|f\|_1$  et  $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \equiv \|g\|_1$  sont finies. On note cette propriété  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$ .

- Montrer qu'alors le produit de convolution  $f * g$  appartient aussi à l'espace  $L^1(\mathbb{R})$ .
- En déduire l'inégalité  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .

- Changement de l'ordre d'intégration

On se donne une fonction  $f$  bornée sur  $]0, 1[$ .

- Ecrire l'intégrale double  $\int_0^1 dy [\int_y^{y^2} dx f(x, y)]$  à l'aide d'une intégrale de la forme  $\int_0^1 F(x) dx$ , où  $F$  est une fonction qu'on précisera.
- Achever le calcul pour  $f(x, y) \equiv 1$ . [ $\frac{1}{6}$ ]

- Intégrale de Gauss

On se propose de calculer l'intégrale de Gauss  $G = \int_0^\infty \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$ .

- Montrer que cette intégrale  $G$  définit bien un nombre réel positif.
- Relier sa valeur à celle de l'intégrale double  $I = \iint_{]0, \infty[ \times ]0, \infty[} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2}) dx dy$ .
- Calculer ensuite  $I$  en passant en coordonnées polaires.
- En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss  $G$ . [ $\sqrt{2\pi}$ ]

- Aire contenue par une ellipse

On se donne  $a > 0$ ,  $b > 0$  et on note  $E$  le disque elliptique bordé par l'ellipse d'équation  $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ . Grâce au changement de variables  $x = ar \cos \theta$ ,  $y = br \sin \theta$ , calculer l'aire de  $E$ . [ $\pi ab$ ]

- Intégrale double [novembre 2012]

Soit  $D$  le disque de centre l'origine et de rayon 1 :  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . On pose  $g(x, y) = (\frac{1}{x^2+y^2})^{3/4}$ .

- L'intégrale double  $I = \iint_D g(x, y) dx dy$  est-elle un nombre réel ?
- Justifier avec soin votre réponse.
- Si la réponse à la question a) est "oui", calculer la valeur de l'intégrale  $I$ . [ $4\pi$ ]

- Intégrale double [novembre 2013]

Soit  $D$  le domaine du plan défini par  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$ . On pose  $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ . On cherche à déterminer les valeurs du paramètre  $\alpha$  pour lesquelles l'intégrale double  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  est un nombre réel puis à calculer cette intégrale.

- Dessiner le domaine  $D$ .

On passe en coordonnées polaires et on pose  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  avec  $r \geq 0$ .

- Montrer que, pour tout  $(x, y) \in D$ , on a  $|f(x, y)| \leq g(r, \theta) \equiv r^{2-2\alpha}$ .

c) Après avoir remarqué que la fonction  $g$  est positive, établir pour quelles valeurs du paramètre  $\alpha$  l'intégrale  $\iint_{r \geq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2} g(r, \theta) r dr d\theta$  obtenue après passage en coordonnées polaires est bien un nombre réel.

d) Dans le cas où  $\iint_{r \geq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2} g(r, \theta) r dr d\theta$  est un nombre réel, calculer l'intégrale  $I$  en fonction de  $\alpha$ .  $\left[ \frac{1}{4(\alpha-2)} \right]$

• Intégrales doubles [novembre 2014]

Soit  $T$  le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

a) Dessiner le triangle  $T$ .

Calculer les cinq intégrales doubles suivantes :

b)  $I_1 = \iint_T dx dy,$

c)  $I_2 = \iint_T x dx dy,$

d)  $I_3 = \iint_T y dx dy,$

e)  $I_4 = \iint_T x^2 dx dy$

f)  $I_5 = \iint_T xy dx dy.$   $\left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24} \right]$

• Intégrale double [février 2015]

On se donne un nombre réel  $\beta$ .

a) Pour quelles valeurs de  $\beta$  l'intégrale  $I(\beta) = \int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt$  définit-elle un nombre réel ?

b) Calculer le nombre  $I(\beta)$  dans un tel cas.

Dans la suite de l'exercice, on considère le disque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et on se donne un nombre } \alpha. \text{ On pose aussi } f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

c) En passant en coordonnées polaires ( $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ), montrer qu'on a la majoration  $|f(x, y)| \leq g(r)$ , avec  $g(r) = \frac{1}{r^{2\alpha-4}}$ .

d) A l'aide du théorème de Tonelli et en passant en coordonnées polaires, montrer que l'intégrale double de la fonction  $g$  sur le disque  $D$  est finie si et seulement si  $\alpha < 3$ .

e) Démontrer que  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$ .

f) Si  $\alpha < 3$ , calculer l'intégrale double  $\iint_D f(x, y) dx dy.$   $\left[ \frac{\pi}{8(3-\alpha)} \right]$

• Intégrales doubles [novembre 2016]

Soit  $T$  le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}.$$

a) Dessiner le triangle  $T$ .

Calculer les cinq intégrales doubles suivantes :

b)  $I_1 = \iint_T dx dy,$

c)  $I_2 = \iint_T x dx dy,$

d)  $I_3 = \iint_T y dx dy,$

e)  $I_4 = \iint_T x^2 dx dy$

f)  $I_5 = \iint_T xy dx dy.$   $\left[ 2, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right]$