le cnam

# Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

## Cours 8 Transformation de Fourier

- Définition

On se donne une fonction intégrable $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$. Notons que sauf exception, on suppose la fonction $f$ à valeurs complexes : $f(t) \in \mathbb{C}$. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\,t)\, f(t) \, \mathrm{d}t$ est bien défini puisque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction $f$. On la note aussi $\mathscr{F} f$ et on a $(\mathscr{F} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

- Exemples fondamentaux

On se donne $a > 0$. L'exponentielle causale $\varphi_a$ est définie par $\varphi_a(t) = H(t)\exp(-a\,t)$. C'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$: $\varphi_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\,\omega}$.
Pour $a > 0$, l'exponentielle causale symétrisée $\psi_a$ s'écrit : $\psi_a(t) = \exp(-|a|\,t)$. C'est une fonction paire qui est identique à $\varphi_a$ si $t \geq 0$. On a $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$. Nous retenons que $(\mathscr{F}(\exp(-a\,|t|)))(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$.
Pour $T > 0$, la porte $P_T$ de largeur $T$ satisfait aux contraintes suivantes : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq T/2$ et $P_T(t) = 0$ lorsque $t < -T/2$ ou $t > -T/2$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est bien entendu finie [$P_T \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$] et on a $\widehat{P_T}(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Sinus cardinal

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ nombre réel différent de zéro, on pose $\operatorname{sinc}\theta = \frac{\sin\theta}{\theta}$. On prolonge cette fonction par continuité en $\theta = 0$: $\operatorname{sinc} 0 = 0$. Alors $\widehat{P_T}(\omega) = T\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Parité

On remarque que si $f$ est paire, sa transformée de Fourier $\mathscr{F} f$ est paire également [exercice].

- Linéarité

Si les fonctions $f$ et $g$ sont intégrables, leur somme est aussi intégrable et on a $\mathscr{F}(f+g) = \mathscr{F} f + \mathscr{F} g$. Si $\lambda$ est un nombre complexe arbitraire et $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a $\mathscr{F}(\lambda\, f) = \lambda\, \mathscr{F} f$.

- Transformée de Fourier d'un retard et retard de la transformée de Fourier

On se donne $a \in \mathbb{R}$. Alors $(\mathscr{F}(f(t-a)))(\omega) = \exp(-i\,a\,\omega)\,(\mathscr{F} f)(\omega)$. De façon analogue, si $\omega_0$ est un réel arbitraire, $(\mathscr{F} f)(\omega - \omega_0) = (\mathscr{F}(\exp(i\,\omega_0\,t)\, f(t)))(\omega)$.

- Changement d'échelle

On se donne $a > 0$. Alors $(\mathscr{F}(f(a\,t)))(\omega) = \frac{1}{a}(\mathscr{F} f)\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

- Une condition suffisante de limite nulle à l'infini

On se donne une fonction $f$ dérivable de sorte que $f$ et sa dérivée $f'$ appartiennent toutes deux à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty} (|f(t)| + |f'(t)|) \, \mathrm{d}t < \infty$. Alors la fonction $f$ tend vers zéro à l'infini : $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$.

---

François Dubois, novembre 2022.

• Transformée de Fourier de la dérivée
Si la fonction $f$ et sa dérivée $f'$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $(\mathscr{F}(f'))(\omega) = i\,\omega\,(\mathscr{F}f)(\omega)$.

• Dérivée de la transformée de Fourier
On suppose que les fonctions $f$ et $\mathbb{R} \ni t \longmapsto t\,f(t) \in \mathbb{C}$ appartiennent à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Alors la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction dérivable et on a $\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\omega} = -i\,(\mathscr{F}(t\,f(t)))(\omega)$.

• Transformée de Fourier d'un produit de convolution
On suppose que les fonctions $f$ et $g$ sont toutes deux intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors leur produit de convolution $f*g$ appartient également à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\mathscr{F}(f*g) = (\mathscr{F}f)\,(\mathscr{F}g)$. La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en un produit ordinaire.

• Transformation de Fourier dans l'espace des fonctions intégrables
On se donne une fonction intégrable à valeurs complexes : $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. On a vu à la leçon précédente que pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien défini puisque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. De plus, la transformée de Fourier $\mathscr{F}f(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ de la fonction $f$ est définie par la fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$.

• La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est bornée
Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$. En d'autres termes, $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

• La transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers zéro à l'infini
Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ tend vers zéro lorsque $\omega$ tend vers $+\infty$ ou $\omega$ tend vers $-\infty$.
Nous constatons que la propriété est vraie pour les trois exemples fondamentaux introduits lors de la leçon précédente, à savoir l'exponentielle causale $\varphi_a(t) = H(t)\,\exp(-a\,t)$, l'exponentielle causale symétrisée $\psi_a(t) = \exp(-a\,|t|)$ et la porte $P_T$ égale à 1 si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et à zéro sinon [avec $a > 0$ et $T > 0$]. On a en effet $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\,\omega}$, $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$ et $\widehat{P}_T(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega\,T}{2}\big)$ ; ces trois fonctions tendent bien vers zéro si $|\omega|$ tend vers l'infini.

• La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction continue
Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction continue de l'argument $\omega$. On a dans ce cas $\widehat{f} \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.
On laisse le lecteur vérifier cette propriété pour les trois exemples fondamentaux rappelés ci-dessus.

• Opérateur de Fourier conjugué
Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$ par l'expression $(\overline{\mathscr{F}}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$. Seul le signe de $\omega$ dans l'exponentielle complexe a changé. On a la relation $(\overline{\mathscr{F}}f)(\omega) = (\mathscr{F}f)(-\omega)$.

- Théorème d'inversion de Fourier (première formulation)

Si d'une part la fonction $f$ est intégrable ($f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$) et si de plus sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable ($\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$), alors on peut représenter la fonction $f$ à l'aide de l'opérateur de Fourier conjugué : $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\,\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ et cette égalité a lieu "pour presque tout" $t \in \mathbb{R}$ (pour tout réel $t$ dans les applications en ingénierie). On peut écrire aussi $f(t) = \frac{1}{2\pi}\,(\overline{\mathscr{F}}\widehat{f})(t)$ ou $f(t) = \frac{1}{2\pi}\,(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f))(t)$.
Seul le second exemple fondamental permet de tester ce théorème d'inversion de Fourier puisque les fonctions $\widehat{\varphi}_a$ et $\widehat{P}_T$ n'appartiennent pas à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice !]. On a par contre $\widehat{\psi}_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice] et le théorème d'inversion de Fourier s'écrit dans ce cas particulier
$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\,\frac{\mathrm{d}\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{\pi}{a}\exp(-a\,|t|)$. On constate qu'on a calculé avec des fonctions élémentaires l'intégrale d'une fonction [ici $\exp(i\,\omega\,t)/(a^2+\omega^2)$] dont la primitive ne peut pas s'exprimer en termes de fonctions élémentaires.
L'égalité ponctuelle $f(t) = \frac{1}{2\pi}\,(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f))(t)$ peut s'écrire aussi $f(t) = \frac{1}{2\pi}\big((\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F})f\big)(t)$ pour tout réel $t$, c'est à dire $\big((\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F})f\big)(t) = 2\pi\,f(t)$. On en déduit donc une égalité entre fonctions $(\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\,f$ pour toute fonction intégrable dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable.

- D'où vient le facteur $2\pi$ dans la formule d'inversion de Fourier ?

Nous proposons dans les lignes qui suivent une explication heuristique de la relation
$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\,\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$. Nous nous donnons $T > 0$ et une fonction $f \in \mathrm{L}^2\big(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\big)$. Nous disposons des coefficients de Fourier $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\exp\big(-\frac{2ik\pi t}{T}\big)\,\mathrm{d}t$ et du développement de la fonction $f$ en série de Fourier : $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \exp\big(\frac{2ik\pi t}{T}\big)$. Nous introduisons la variable de Fourier $\omega = \frac{2k\pi}{T} = k\,\frac{2\pi}{T}$. Comme $k \in \mathbb{Z}$, le nombre $\omega$ est un multiple entier du "pas discret " $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Nous pouvons donc écrire
$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\exp(-ik\Delta\omega t)\,\big(\int_{-T/2}^{T/2} f(\theta)\exp(-ik\Delta\omega\,\theta)\,\mathrm{d}\theta\big)$ et puisque $\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\Delta\omega$,
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta\omega\,\exp(-ik\Delta\omega t)\,\big(\int_{-T/2}^{T/2} f(\theta)\exp(-ik\Delta\omega\,\theta)\,\mathrm{d}\theta\big)$. Si $T$ tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_{-T/2}^{T/2} f(\theta)\exp(-ik\Delta\omega\,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\exp(-ik\Delta\omega\,\theta)\,\mathrm{d}\theta$, c'est à dire la transformée de Fourier $\widehat{f}(k\Delta\omega)$ pour $\omega = k\Delta\omega$ et $f(t) \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta\omega\,\exp(ik\Delta\omega t)\widehat{f}(k\Delta\omega)$. Mais si $T$ tend vers l'infini le pas discret $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ tend vers zéro et la somme précédente $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(ik\Delta\omega t)\,\widehat{f}(k\Delta\omega)\,\Delta\omega$ converge vers l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\,\omega\,t)\,\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$. Par un calcul formel (qui n'est pas une démonstration !), nous avons obtenu la relation de Fourier qui explicite la fonction grâce à sa transformée de Fourier : $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\,\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$.

- Inverse de l'opérateur de Fourier

On note dans ce paragraphe $\mathscr{E}$ l'espace des fonctions intégrables dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable. Alors l'égalité précédente $(\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\,f$ est vraie pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$. On en déduit que l'opérateur $\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F}$ transforme la fonction $f$ en elle même, à un facteur $2\pi$ près. Si on appelle "identité" l'opérateur $\mathscr{E} \ni f \longmapsto \mathrm{id}f = f \in \mathscr{E}$, la relation $(\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\,\mathrm{id}f$ valable pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$ peut aussi s'écrire comme une relation entre opérateurs de l'espace $\mathscr{E}$ : $\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F} = 2\pi\,\mathrm{id}$. Quand on compose les opérateurs $\mathscr{F}$ et $\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$, on trouve l'identité : $\big(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\big){\circ}\mathscr{F} = \mathrm{id}$. On peut montrer [exercice !] qu'on a aussi
$\mathscr{F}{\circ}\big(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\big) = \mathrm{id}$. En d'autres termes, $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$. A un facteur $2\pi$ près, l'inverse de la

transformée de Fourier est égal à l'opérateur de Fourier conjugué !

- Approximation des fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Si on se donne une fonction de carré intégrable ($f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$), elle n'est pas en général intégrable sur $\mathbb{R}$. Mais si on la tronque en posant pour $k$ entier positif, $f_k = P_{2k}\, f$, c'est à dire $f_k(t) = f(t)$ si $|t| \leq k$ et $f_k = 0$ sinon, on obtient une suite de fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Cette suite $f_k$ converge vers $f$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ : $\|f - f_k\|_2$ tend vers zéro si $k$ tend vers l'infini.

- Transformée de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Comme la suite $f_k$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f_k}$ est bien définie *via* la relation $\widehat{f_k}(\omega) = \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega\, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$. On peut montrer que cette suite $\widehat{f_k}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et converge dans cet espace vers une fonction notée $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F} f$ qui définit la transformation de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. De plus, on a pour "presque tout" $\omega \in \mathbb{R}$, $(\mathscr{F} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k \to +\infty} \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega\, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$.

On constate que la définition de la transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ n'est pas aussi immédiate que dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Elle a de toutefois de nombreuses propriétés, très simples à énoncer.

- Conservation, à un facteur $2\pi$ près, du produit scalaire

On rappelle que pour deux fonctions $f$ et $g$ de carré intégrables, le produit scalaire $(f, g) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \overline{g(t)}\, \mathrm{d}t$ est bien défini. On a la relation de Bessel-Parseval : $(\widehat{f}, \widehat{g}) = 2\pi\, (f, g)$. A un facteur $2\pi$ près, la transformation de Fourier conserve le produit scalaire. Dans le cas où $f = g$, cette conservation du produit scalaire s'écrit comme une conservation des normes : $(\widehat{f}, \widehat{f}) = \|\mathscr{F} f\|_2^2 = 2\pi\, \|f\|_2^2 = 2\pi\, (f, f)$.

- Opérateur de Fourier conjugué dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

On étend comme dans le cas précédent la transformée de Fourier conjuguée à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ : $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k \to +\infty} \int_{-k}^{k} \exp(i\,\omega\, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$. On a également, pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = (\mathscr{F} f)(-\omega)$.

- Théorème d'inversion de Fourier (seconde formulation)

On a dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ les relations suivantes entre l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ et l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$ : $\overline{\mathscr{F}} {\scriptstyle\circ} \mathscr{F} = \mathscr{F} {\scriptstyle\circ} \overline{\mathscr{F}} = 2\pi\, \mathrm{id}$. On peut aussi écrire ces relations sous la forme $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathscr{F}}$. A un facteur $2\pi$ près, l'inverse de la transformée de Fourier dans l'espace des fonctions de carré intégrable est égal à l'opérateur de Fourier conjugué.

On en déduit que pour toute fonction $f$ de carré intégrable, on a $f = \frac{1}{2\pi} (\mathscr{F} {\scriptstyle\circ} \overline{\mathscr{F}})(f)$ et on a aussi $f = \frac{1}{2\pi} (\overline{\mathscr{F}} {\scriptstyle\circ} \mathscr{F})(f)$. En particulier pour (presque) tout nombre réel $t$, on a les égalités $f(t) = \frac{1}{2\pi} \big(\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}} f)\big)(t)$ et $f(t) = \frac{1}{2\pi} \big(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f)\big)(t)$. On ne peut ensuite écrire ces égalités avec des intégrales que si les fonctions $f$ et $\mathscr{F} f$ sont intégrables.

- Calcul d'une transformée de Fourier à l'aide du théorème d'inversion de Fourier

Pour la fonction porte, on se donne $T > 0$. On déduit [exercice !] des égalités précédentes la relation $\mathscr{F}\big(\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega T}{2}\big)\big)(t) = \frac{2\pi}{T} P_T(t)$. En particulier pour $T = 2$, $(\mathscr{F} \mathrm{sinc})(t) = \pi$ si $|t| < 1$ et $(\mathscr{F} \mathrm{sinc})(t) = 0$ si $|t| > 1$. Grâce au théorème d'inversion de Fourier, on a calculé la transformée de Fourier du sinus cardinal sans jamais écrire une seule intégrale !

## Exercices

• Transformation de Fourier du sinus cardinal

On se donne $T>0$ et on note $P_T$ la fonction porte : $P_T(t)=1$ si $|t|\leq \frac{T}{2}$, $P_T(t)=0$ si $|t|>\frac{T}{2}$. Par ailleurs, pour $t$ réel, on définit le sinus cardinal $\mathrm{sinc}(t)$ par la relation $\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin t}{t}$.

a) Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $P_T$ ?

b) Montrer que $P_T \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

c) En déduire que $\widehat{P_T}$ appartient également à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

d) En choisissant bien le paramètre $T$, calculer la transformée de Fourier du sinus cardinal.

[prendre $T=2$ ; $(\mathscr{F}(\mathrm{sinc}))(\omega)=\pi P_2(\omega)$]

• Autour de la transformée de Fourier d'une loi de Cauchy

Pour $t$ réel, une loi de Cauchy est une fonction de la forme $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

a) A l'aide de la transformée de Fourier conjuguée de la fonction $\exp(-a\,|t|)$ et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$.

b) En déduire la transformée de Fourier conjuguée de la fonction $g(t)=\frac{1}{10+6t+t^2}$.

c) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $h(t)=\frac{t}{(1+t^2)^2}$.

d) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $j(t)=\frac{t}{1+t^2}$.

[$\pi\exp(-|\omega|)$, $\pi\exp(3\,i\,\omega-|\omega|)$, $-\frac{i\pi}{2}\,\omega\exp(-|\omega|)$, $-i\,\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)\exp(-|\omega|)$ ]

• Pour quelques intégrales de plus

On se donne $a>0$. On définit la porte $P_a$ par les relations $P_a(t)=1$ si $|t|\leq\frac{a}{2}$ et $P_a(t)=0$ si $|t|>\frac{T}{2}$.

a) Expliciter le produit de convolution $\varphi_a=P_a * P_a$. [$\varphi_a(t)=a-|t|$ si $|t|\leq a$, 0 sinon]

b) Quelle est la transformée de Fourier $\widehat{\varphi_a}$ de la fonction $\varphi_a$ ?

c) Avec un choix convenable de $a$, déterminer la transformée de Fourier $\mathscr{F}(\mathrm{sinc}^2)$ du carré du sinus cardinal. $\left[\frac{\pi}{2}\,\varphi_2\right]$

d) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. $[\pi]$

e) Même question pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^4}\,\mathrm{d}t$. $\left[\frac{2}{3}\,\pi\right]$

d) Préciser, selon les valeurs du paramètre $\omega\in\mathbb{R}$, les valeurs prises par l'intégrale $I(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$. $\left[(\mathscr{F}(\mathrm{sinc}^2))(\omega)\right]$

• Transformation de Fourier [février 2014]

On se donne un réel $a$ strictement positif et la fonction $f$ définie par $f(t)=\exp(-a\,|t|)$.

a) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F}f)(\omega)$ ?

b) Rappeler pourquoi la fonction $(\mathscr{F}f)(\omega)$ est à la fois paire et réelle.

c) Expliquer pourquoi la fonction $g(\omega)=\frac{1}{a^2+\omega^2}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

d) Pour $t$ réel arbitraire, montrer que l'expression $\Phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega)\exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega$ est bien définie.

e) A l'aide de quel opérateur est-elle reliée à la fonction $g$ ?

f) Calculer une expresion analytique de $\Phi(t)$ pour tout nombre réel $t$.

- Transformation de Fourier [février 2015]

On note $P_T$ la fonction porte : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$, $P_T(t) = 0$ si $|t| > \frac{T}{2}$. On note $f$ le produit de convolution $f = P_T * P_T$.

a) Rappeler l'expression de la transformée de Fourier $\widehat{P_T}(\omega)$ de la porte $P_T$.

b) Montrer que la fonction $f$ admet l'expression suivante :
$f(t) = T - |t|$ si $|t| \leq T$, $f(t) = 0$ si $|t| > T$.

c) Représenter graphiquement la fonction $f$.

d) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ de la fonction $f$. Appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables ?

On désigne par sinc la fonction sinus cardinal : $\mathrm{sinc}(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$.

e) Calculer en fonction de $t$ les valeurs de l'intégrale $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega T}{2}\big)\big)^2 \exp(i\,\omega t)\,\mathrm{d}\omega$.

f) En déduire une expression analytique de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathrm{sinc}(\theta)\big)^2\,\mathrm{d}\theta$.

- Convolution et transformation de Fourier [avril 2016]

On se donne un nombre réel $\tau$ strictement positif et la fonction $f$ définie par
$f(t) = \exp(-\,|\,t\,|\,/\tau)$. On remarque que $f(t) = \exp(t/\tau)$ si $t \leq 0$ et $f(t) = \exp(-t/\tau)$ si $t \geq 0$.

a) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ de la fonction $f$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \exp(i\,\omega t)\,\mathrm{d}\omega$.

c) Que vaut $I(0)$?

d) Pouvait-on prévoir le résultat par une autre méthode ?

e) Montrer que le produit de convolution $\varphi(t) \equiv (f * f)(t)$ est une fonction paire de l'argument $t$.

f) Si $t$ est positif ou nul, calculer le produit de convolution $\varphi(t) = (f * f)(t)$.

g) Quelle est l'expression de $\varphi(t)$ si $t$ est un réel quelconque ?

h) Que vaut $\varphi'(0)$ ?

i) Calculer l'expression de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la fonction $\varphi$.

j) En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2}\,\mathrm{d}\omega$.

- Transformation de Fourier [février 2017]

On pose $\varphi(t) = \exp(-|t|)$.

a) Rappeler pourquoi la fonction $\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer les valeurs $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de cette fonction.

c) Montrer que le produit de convolution $f = \varphi * \varphi$ est une fonction paire.

d) Calculer les valeurs $f(t)$ de ce produit de convolution pour tout nombre réel $t$.

e) Calculer les valeurs $\widehat{f}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de ce produit de convolution.

f) En déduire les valeurs des intégrales $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{(1+\omega^2)^2}\,\mathrm{d}\omega$ pour tout nombre réel $t$.