le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 11 Echantillonnage

- Transformée de Fourier du peigne de Dirac

On se donne $a > 0$. Nous avons vu lors de la leçon précédente que le peigne de Dirac $\Delta_a \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k\,a}$ peut aussi s'écrire $\Delta_a = \frac{1}{a} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \exp\big(\frac{2i\pi\ell}{a}\big)$. On peut en déduire que la transformée de Fourier du peigne de Dirac est un autre peigne de Dirac : $\widehat{\Delta_a} = \frac{2\pi}{a}\, \Delta_{\frac{2\pi}{a}}$.

- Une propriété de la convolution des fonctions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, leur produit de convolution $f * g$ est défini (presque partout) par la relation $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, \mathrm{d}\theta$. On le teste contre une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, c'est à dire qu'on évalue l'intégrale $< f*g,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. On a en appliquant le théorème de Fubini : $< f*g,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\theta\, f(\theta)\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, g(t)\, \varphi(t+\theta)$. On pose $\psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \varphi(t+\theta)\, \mathrm{d}t$ et on a : $< f*g,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, \psi(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

- Convolution des distributions

Pour passer aux distributions, les fonctions f et g sont remplacées par des distribution T et U. La relation précédente se généralise en $< T*U,\, \varphi >=< T,\, \psi >$ avec une fonction ψ telle que $\psi(\theta) =< U,\, \varphi_\theta >$ et $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$.
Attention ! La convolution $T*U$ des distributions T et U n'est pas toujours définie. Pour calculer $< T*U,\, \varphi >$, on suit l'algorithme suivant :
(i) définir une nouvelle fonction $\varphi_\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$
(ii) faire agir U sur cette fonction : $\psi(\theta) =< U,\, \varphi_\theta >$
(iii) si la fonction ψ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (ce qui n'est pas toujours vrai !) alors il suffit de faire agir T sur la fonction ψ et $< T*U,\, \varphi >=< T,\, \psi >$. Si la fonction ψ n'appartient pas à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, le processus s'arrête et le produit de convolution $T*U$ n'est pas défini.

- La masse de Dirac est un élément neutre pour la convolution

Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, les produits de convolution $T*\delta$ et $\delta*T$ sont bien définis et on a $T*\delta = \delta*T = T$.

- Convolution d'une fonction par la masse de Dirac au point a

On se donne $a \in \mathbb{R}$ et une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La translatée $\tau_a f$ de la fonction f par le "vecteur" a est définie par $\tau_a f(t) = f(t-a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On a alors $f*\delta_a = \delta_a * f = \tau_a f$.

- Signal échantillonné

On se donne un pas d'échantillonnage a et une fonction continue f à croissance lente de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose connues les valeurs $f(ka)$ de la fonction f aux points multiples entiers ka du pas d'échantillonnage a. On appelle signal échantillonné le produit de f par le peigne de Dirac Δ_a : $f\,\Delta_a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(ka)\, \delta_{k\,a}$.

François Dubois, décembre 2022.

• Spectre du signal échantillonné

Quand on échantillonne un signal, on rend périodique sa transformée de Fourier. On se donne $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ continue ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Alors la fransformée de Fourier $\widehat{f\Delta_a}$ est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{a}$. On a les deux expressions suivantes $\widehat{f\Delta_a}(\omega) = \frac{1}{a}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\big(\omega - \frac{2\ell\pi}{a}\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(ka)\exp(-i\,ka\,\omega)$. On a bien
$\widehat{f\Delta_a}\big(\omega + \frac{2\pi}{a}\big) = \widehat{f\Delta_a}(\omega)$.

• Signal à bande limitée

On se donne $\Omega > 0$ et $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On dit que le signal f est à bande limitée dans $[-\Omega, \Omega]$ si sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est nulle dès que $|\omega|$ est assez grand en valeur absolue :
$|\omega| > \Omega \Longrightarrow \widehat{f}(\omega) = 0$.

• Critère de Nyquist

On dit que le pas d'échantillonnage a respecte le critère de Nyquist pour un signal f à bande limitée dans $[-\Omega, \Omega]$ si et seulement si $a\Omega < \pi$.

• Désaliasing

On se donne un signal f à bande limitée dans $[-\Omega, \Omega]$ et un pas d'échantillonnage a qui respecte le critère de Nyquist $a\Omega < \pi$. Alors la somme $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\big(\omega - \frac{2\ell\pi}{a}\big)$ ne comporte qu'un seul terme non nul. On a dans ce cas $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\big(\omega - \frac{2\ell\pi}{a}\big) = \widehat{f}(\omega)$ si $|\omega| \leq \Omega$.
Echantillonner un signal f "replie" le spectre et mélange les fréquences ; on parle alors d'"aliasing". Le critère de Nyquist permet de lever cette indétermination.

• Thérème de Shannon

On se donne une fonction continue f qui appartient aussi à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et on la suppose à bande limitée dans l'intervalle $[-\Omega, \Omega]$. On échantillonne ce signal avec un pas a qui respecte le critère de Nyquist : $a\Omega < \pi$. Alors pour tout réel t, on a $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(ka)\,\mathrm{sinc}\big(\big(\frac{t}{a} - k\big)\,\pi\big)$.
La preuve de ce résultat utilise le désaliasing et un préliminaire technique :
$\big(\overline{\mathscr{F}}\big[\exp(-ika\,\omega)\,P_{\frac{2\pi}{a}}(\omega)\big]\big)(t) = \frac{2\pi}{a}\,\mathrm{sinc}\big(\big(\frac{t}{a} - k\big)\,\pi\big)$.
Pour un signal à bande limitée et un échantillonnage qui respecte le critère de Nyquist, on peut reconstruire de manière unique l'ensemble du signal à partir du signal échantillonné. Il n'existe qu'une seule façon d'interpoler entre les valeurs données $f(ka)$ pour k entier, tout en gardant la contrainte de limitation de la bande spectrale.

Exercices

• Fourier inverse d'une porte par une sinusoïde

On rappelle que la conjuguée $\overline{\mathscr{F}}$ de la transformée de Fourier est définie pour une fonction f par $(\overline{\mathscr{F}}f)(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$. On se donne un réel a strictement positif. On définit la porte P_T de largeur $T > 0$ par les relations $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ sinon.
Montrer que $\big[\overline{\mathscr{F}}\big(\exp(-i\,k\,a\,\omega)\,P_{\frac{2\pi}{a}}(\omega)\big)\big](t) = \frac{2\pi}{a}\,\mathrm{sinc}\big(\pi\,\big(\frac{t}{a} - k\big)\big)$.

• Convolution par une masse de Dirac

Soit a un nombre réel et f une fonction continue bornée pour fixer les idées. On note δ_a la masse de Dirac au point a : $<\delta_a, f> = f(a)$ et τ_a l'opérateur de décalage de la valeur a :

$\big(\tau_a f\big)(t) = f(t-a)$.
a) Montrer que $f * \delta_a = \delta_a * f = \tau_a f$.
b) Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ est maintenant une distribution arbitraire et δ la masse de Dirac au point zéro, c'est à dire $< \delta\,, \varphi >= \varphi(0)$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, montrer que $T * \delta = \delta * T = T$.
c) Montrer que si a et b sont des nombres réels, $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

- Convolution et transformée de Fourier

a) Soient deux fonctions f et g. Montrer que l'on a $\mathscr{F}(f\,g) = \frac{1}{2\pi}\,(\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} g)$.
b) Montrer que le résultat est encore vrai si on remplace $\mathscr{F}$ par $\overline{\mathscr{F}}$ partout dans la relation précédente.
La fonction f est maintenant une fonction "à croissance lente", ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ infiniment dérivable et à décroissance rapide, le produit $f\,\varphi$ est encore une fonction de l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. On se donne aussi une distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
c) Montrer que l'on a : $\mathscr{F}(f\,T) = \frac{1}{2\pi}\,(\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} T)$.

- Aliasing

On se donne deux réels strictement positifs R et T avec lesquels on fabrique un signal complexe $f(t) = R\exp\big(2\,i\pi\,\frac{t}{T}\big)$.
a) Montrer que ce signal est un bon modèle pour une roue de rayon R qui tourne dans le sens direct avec la période T.
b) Quelle est la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de ce signal ? En déduire que le signal f est à bande limitée $[-\Omega, \Omega]$ avec $\Omega = \omega_0$.
c) Si on échantillonne ce signal avec un pas d'échantillonnage $\alpha = \frac{T}{4}$, le critère de Nyquist est-il vérifié ?
On échantillonne ce signal avec un nouveau pas d'échantillonnage $a = \frac{3T}{4}$. On note $g = f\,\Delta_a$ le signal échantillonné, où Δ_a est le peigne de Dirac pour le pas d'échantillonnage a.
d) Montrer que le critère de Nyquist n'est pas vérifié.
e) Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{g}$ fait apparaître deux masses de Dirac situées aux pulsations $\frac{2\pi}{T}$ et $-\frac{2\pi}{3T}$.
f) Montrer que $g(t) = \frac{4R}{3T}\,\big[\exp\big(2\,i\pi\,\frac{t}{T}\big) + \exp\big(-2\,i\pi\,\frac{t}{3T}\big)\big]$.
g) Expliquer pourquoi dans les westerns, quand une diligence accélère au démarrage, il y a un laps de temps où on a l'impression que les roues tournent à l'envers.