le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 13 Filtres discrets

- Translation temporelle

On rappelle que pour $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la fonction translatée $\tau_a \varphi$ de la fonction φ est définie par $(\tau_a \varphi)(t) = \varphi(t-a)$.
Alors pour toute fonction f bornée sur $\mathbb{R}$, on vérifie simplement que $\int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, (\tau_{-a} \varphi)(t)\, \mathrm{d}t$. Si on se donne une distribution $U \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, la distribution translatée $\tau_a U$ est définie de sorte que la relation précédente soit satisfaite dans le cas où U est une fonction bornée. On pose donc $< \tau_a U, \varphi > = < U, \tau_{-a} \varphi >$ pour toute fonction test φ.
On vérifie alors que $\tau_a \delta = \delta_a$, masse de Dirac au point a. Cette relation se généralise aux itérés de l'opérateur de translation τ_a : $(\tau_a)^k \, \delta = \delta_{ka}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- Signaux discrets

On se donne un pas d'échantillonnage en temps $a > 0$. Un signal discret x n'est connu que par ses valeurs x_k en des instants $t_k = k\, a$ qui sont tous multiples entiers du pas de temps. On le modélise d'un point de vue mathématique avec une variante du peigne de Dirac. On pose $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\, a}$.
Si tous les x_k sont nuls sauf pour $k = 0$ pour lequel on a $x_0 = 1$, alors le signal x est égal à la masse de Dirac. On peut donc écrire $\delta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \kappa_{k,0} \, \delta_{k\, a}$, où $\kappa_{k,\ell}$ est le symbole de Kronecker, nul si $k \neq \ell$ et égal à 1 pour $k = \ell$.
Si tous les x_k valent 1 pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors le signal x est égal au peigne de Dirac Δ_a.
L'ensemble des signaux discrets x de la forme $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\, a}$ est noté X_a.

- Espaces de signaux discrets

Les signaux discrets bornés, intégrables ou de carré intégrables constituent les espaces ℓ^∞_a, ℓ^1_a et ℓ^2_a respectivement. On a par définition $x \in \ell^\infty_a$ si et seulement si $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ et $x \in \ell^1_a$ si et seulement si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| < \infty$; la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k$ est alors absolument convergente. Enfin, $x \in \ell^2_a$ si et seulement si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty$ et la série des carrés des modules est convergente.
Les espaces ℓ^∞_a, ℓ^1_a et ℓ^2_a sont normés et les normes associées sont définies par $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|$ pour $x \in \ell^\infty_a$, $\|x\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|$ pour $x \in \ell^1_a$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2}$ si $x \in \ell^2_a$.

- Translation temporelle d'un signal discret

Si $x \in X_a$ est un signal discret, c'est à dire $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\, a}$, alors son translaté temporel $\tau_a x$ est un nouveau signal temporel qui se calcule selon la relation $\tau_a x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{k-1} \, \delta_{k\, a}$. En d'autres termes, $(\tau_a x)_k = x_{k-1}$.

- Une autre expression d'un signal discret

On se donne un signal discret $x \in X_a$ de la forme $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\, a}$. Alors on peut l'écrire à l'aide de l'opérateur de translation : $x = \big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, (\tau_a)^k \big) \, \delta$.

François Dubois, janvier 2023.

• Filtre discret

Un filtre discret T est un opérateur $X_a \longrightarrow X_a$ qui à un signal discret $x \in X_a$ associe un nouveau signal discret $y = T(x) \in X_a$ (noté aussi $y = Tx$) de sorte à satisfaire les trois propriétés suivantes de linéarité, continuité et invariance par translation temporelle.
La linéarité exprime d'une part que $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ pour tout les signaux d'entrée x_1 et x_2 de X_a et d'autre part que $T(\lambda\, x) = \lambda\, T(x)$ pour tout scalaire λ et tout signal d'entrée $x \in X_a$.
La continuité exprime qu'une norme du signal de sortie (en pratique une des trois normes introduites plus haut) est toujours contrôlée par la norme correspondante du signal d'entrée :
$\exists\, C \geq 0,\ \forall x \in X_a,\ \|Tx\| \leq C\, \|x\|$.
L'invariance par translation temporelle est une conséquence de l'hypothèse très générale qu'aucun instant n'est privilégié : l'opérateur T commute avec la translation temporelle τ_a :
$T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$ et pour tout signal x, $T(\tau_a x) = \tau_a(Tx)$.

• Exemples de filtres discrets

Les exemples de filtres fondamentaux sont l'identite id et la translation τ_a. On a $\mathrm{id}x = x$ pour tout signal $x \in X_a$. La translation temporelle a été définie plus haut dans ce chapitre. On peut aussi se donner des formules de calcul qui permettent d'expliciter le signal de sortie $y = Tx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n\, \delta_{n\,a}$ en fonction du signal d'entrée $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n\, \delta_{n\,a}$. Pour les deux exemples précédents, on a respectivement $y_n = x_n$ et $y_n = x_{n-1}$.
Ainsi, les relations $y_n = \frac{1}{2}\,(x_n + x_{n-1})$, $y_n = \frac{1}{4}\, x_n + \frac{1}{2}\, x_{n-1} + \frac{1}{4}\, x_{n-2}$ et $y_n = \frac{1}{4}\, x_{n+1} + \frac{1}{2}\, x_n + \frac{1}{4}\, x_{n-1}$ définissent trois filtres. Nous invitons le lecteur à vérifier pour ces trois exemples les propriétés de linéarité, continuité et invariance par translation dans le temps.

• Convolution de deux masses de Dirac

On se donne deux nombres réels a et b. Alors le produit de convolution de la masse de Dirac au point a par la masse de Dirac au point b est égal à la masse de Diracc au point $a + b$: $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

• Structure d'un filtre discret

On se donne un filtre discret $T : X_a \longrightarrow X_a$ qui satisfait les propriétés de linéarité, continuité et invariance temporelle proposées plus haut. Alors le signal de sortie Tx pour une entrée $x \in X_a$ s'exprime comme un produit de convolution : $Tx = h * x$. Le signal h est appelé réponse impulsionnelle du filtre. Il est donné par $h = T\delta$, signal de sortie pour une entrée égale à l'impulsion de Dirac δ.

• Convolution discrète

Le produit de convolution $h * x$ du signal discret h par le signal discret x est un signal discret qui se décompose, quand il est défini, sur les masses de Dirac δ_{pa} multiples du pas de temps a: $h * x = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (h * x)_p\, \delta_{pa}$. Le nombre $(h * x)_p$ est donné par la somme de la série suivante : $(h * x)_p = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell\, x_{p-\ell}$.
Une question importante est de savoir dans quelles conditions la série précédente est effectivement convergente.

- Convolution d'un signal dans ℓ_a^∞ par un signal dans ℓ_a^1

Si $h \in \ell_a^\infty$ ($\sup_{k\in\mathbb{Z}} |h_k| < \infty$) et $x \in \ell_a^1$ ($\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$), alors le produit de convolution $h * x$ est bien défini, il appartient à ℓ_a^1 et on a l'inégalité $\|h*x\|_1 \le \|h\|_\infty \|x\|_1$.

- Convolution de deux signaux dans ℓ_a^2

Si $h \in \ell_a^2$ ($\sup_{k\in\mathbb{Z}} |h_k|^2 < \infty$) et $x \in \ell_a^2$ ($\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty$) également, alors le produit de convolution $h * x$ est bien défini. Il appartient à ℓ_a^∞ et on a l'inégalité $\|h*x\|_\infty \le \|h\|_2 \|x\|_2$.

- Signal causal

Un signal $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \, \delta_{ka}$ est causal si et seulement si les coefficients x_k sont tous nuls si $k \le -1$. On note X_a^+ l'ensemble de tous les signaux causaux.

- Filtre causal

Un filtre discret $T : X_a \longrightarrow X_a$ est causal si et seulement si il transforme tout signal causal $x \in X_a^+$ en un signal causal $Tx \in X_a^+$. On peut également considérer le filtre T comme un opérateur de X_a^+ dans X_a^+.

- Réponse impulsionnelle causale

Un filtre discret T défini par sa réponse impulsionnelle h (on a donc $Tx = h*x$) est causal si et seulement si le signal $h = T\delta$ est un signal causal. La propriété $(x \in X_a^+ \Longrightarrow Tx \in X_a^+)$ est équivalente à $h \in X_a^+$.
Dans le cas d'un filtre causal de réponse impulsionnelle h et d'un signal causal x, le coefficient $(h*x)_p$ du produit de convolution $h*x$ est donné par une somme finie. Il est donc toujours défini.

Exercices

- A propos de l'opérateur de translation

Soit $a > 0$. On note τ_a l'opérateur de translation dans le temps défini pour une fonction φ régulière et à décroissance rapide $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par $(\tau_a \varphi)(t) = \varphi(t-a)$. On se donne $f \in \mathrm{L}^\infty$ une fonction bornée.
a) Montrer que l'on a $\int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(t)\, (\tau_{-a}\varphi)(t)\, \mathrm{d}t$.
b) En déduire que la définition $\tau_a U$ de la translatée d'une distribution $U \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ grâce à la relation $< \tau_a U \,,\, \varphi > = < U \,,\, \tau_{-a}\varphi >$, peut se ramener à la relation démontrée ci-dessus.

- Translatées de la masse de Dirac

Soit $a > 0$ et τ_a l'opérateur introduit à l'exercice précédent. On désigné par δ la masse de Dirac et δ_α la masse de Dirac en un point donné $\alpha \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que $\tau_a \delta = \delta_a$ et que de façon plus générale $(\tau_a)^k \delta = \delta_{ka}$ pour k entier positif ou nul.
b) Montrer que $(\tau_a)^{-1} \delta = \delta_{-a}$.
c) En déduire que la relation $(\tau_a)^k \delta = \delta_{ka}$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

- Translatée d'une distribution

Soit $a > 0$ et τ_a l'opérateur de translation dans le temps. Soit $U \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ une distribution quelconque. Démontrer que $\delta_a * U \;=\; \tau_a U$.

- Filtres classiques

Soit $x \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{na} \in X_a$ un signal discret. On note T_1 le filtre qui à $x \in X_a$ associe le signal $T_1 x = y$ tel que $y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$. De même, on note T_2 le filtre qui à $x \in X_a$ associe le signal $T_2 x = z$ tel que $z_n = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2}$.

a) Calculer les réponses impulsionnelles h_1 et h_2 de ces deux filtes.

b) Montrer qu'ils sont causaux.

c) Vérifier que l'on a $T_1 x = h_1 * x$ et $T_2 x = h_2 * x$ pour tout signal $x \in X_a$.

d) Montrer que $h_1 * h_1 = h_2$.

e) En déduire que l'on a $T_1(T_1 x) = T_2 x$ pour tout signal discret $x \in X_a$.

- D'autres filtres classiques

On note T le filtre qui à $x \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{na} \in X_a$ associe le signal $Tx = y \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, \delta_{na} \in X_a$ tel que $y_n = \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$.

Calculer la réponse impulsionnelle h de ce filtre et montrer que le filtre T n'est pas causal (on pourra construire un signal x causal qui se transforme en un signal y non causal).

- Dérivateur

a) Montrer que le filtre D_a défini par la relation de récurrence $(D_a x)_n = \frac{1}{a}(x_n - x_{n-1})$ est causal.

b) Préciser sa réponse impulsionnelle.

c) Montrer que si a tend vers zéro et si le signal discret x est obtenu par restriction d'un signal analogique régulier X (de façon précise, $x_n = X(na)$) alors le signal de sortie $D_a x$ approche la dérivée $X'(t)$.

d) Calculer le résultat itéré $D_a(D_a x)$.

e) Quelle est sa limite si a tend vers zéro ?

- Signaux discrets [février 2013]

Pour un nombre réel α arbitraire, δ_α représente la masse de Dirac au point α. Par ailleurs, a est un nombre réel fixé strictement positif.

a) Rappeler l'expression du produit de convolution $\delta_{na} * \delta_{ma}$ des masses de Dirac δ_{na} et δ_{ma} pour deux entiers n et m.

b) Soit $h_1 = \frac{3}{2}\delta_0 - \frac{1}{2}\delta_a$ et $h_2 = \delta_0 - \delta_a$ deux signaux discrets. Calculer leur produit de convolution $h \equiv h_1 * h_2$.

On introduit le filtre discret T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \, \delta_{ka}$ associe $y \equiv h * x$.

c) Quelle est l'expression de y_n en fonction des x_k ?

d) Le filtre T est-il causal ?

e) Le filtre T est-il stable ?

- Signaux discrets [avril 2013]

Pour un nombre réel α arbitraire, δ_α représente la masse de Dirac au point α. Par ailleurs, a est un nombre réel fixé strictement positif.

a) Rappeler l'expression du produit de convolution $\delta_{na} * \delta_{ma}$ des masses de Dirac δ_{na} et δ_{ma} pour deux entiers n et m.

b) Soit $h_1 = 4\,\delta_0 - \delta_a$ et $h_2 = \delta_0 - \delta_a$ deux signaux discrets. Calculer leur produit de convolution $h \equiv h_1 * h_2$.

c) On introduit le filtre discret T qui au signal discret
$x \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,\delta_{ka}$ associe $y \equiv h * x$. Quelle est l'expression de y_n en fonction des x_k ?

d) Le filtre introduit à la question précédente est-il causal ?

e) Le filtre introduit à la question c) est-il stable ?