

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal (MAA107)

Devoir 2, à rendre pour la séance numéro 7, mardi 08 novembre 2022

Exercice 1) Série de Fourier

On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} périodique de période 2π définie par $f(x) = x^2$ si $x \in [-\pi, \pi]$.

- Montrer que la fonction f est paire.
- Tracer la courbe représentative de la fonction f .
- Calculer les coefficients de Fourier a_k et b_ℓ de la fonction f pour k entier positif et ℓ entier supérieur ou égal à 1.

Pour n entier supérieur ou égal à 1, on note $S_n(f)$ le polynôme trigonométrique défini par $(S_n(f))(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + \sum_{\ell=1}^n b_\ell \sin(\ell t)$. On admet dans la suite que pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, la série numérique $(S_n(f))(t)$ converge vers le nombre $f(t)$.

- En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$.
- Que vaut la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$?
- Démontrer que $f \in L^2(-\pi, \pi)$.
- En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^4$.

Exercice 2) Produit de convolution et équation différentielle

On se donne deux réels $0 < a < b$. On pose $f(t) = \exp(-ta)H(t)$ où H est la fonction de Heaviside définie par $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. On pose aussi $g(t) = \exp(-tb)H(t)$.

- Calculer le produit de convolution $f * g$ et représenter graphiquement cette fonction.
- Même question pour $f * f$ qui correspond au cas $b = a$.
- En déduire la solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + ay = 5 \exp(-ta)$ avec la condition initiale $y(0) = 11$.
- Vérifier que la fonction $y(t)$ trouvée à la question précédente est bien solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + ay = 5 \exp(-ta)$ avec la condition initiale $y(0) = 11$.