

② Longueur d'une courbe plane

• Vitesse.

On se place dans le plan \mathbb{R}^2 et on note (\vec{e}_1, \vec{e}_2) la base canonique: $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

Une courbe dans le plan est la donnée de deux fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$ sont deux nombres réels) et de la famille de points $M(t)$ de sorte que

$$(1) \quad \vec{OM}(t) = x(t) \vec{e}_1 + y(t) \vec{e}_2, \quad a \leq t \leq b.$$

• Un cas particulier important concerne les "courbes fonctionnelles", où $x(t) \equiv t$. on a alors $y(t) = y(x)$ qu'on peut écrire aussi $y = f(x)$, où $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée. on a alors

$$(2) \quad \vec{OM}(x) = x \vec{e}_1 + f(x) \vec{e}_2, \quad a \leq x \leq b;$$

le point M a pour abscisse x et ordonnée $y = f(x)$; on retrouve les "courbes représentatives de fonctions", bien classiques!

- Si les fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont dérivables, en introduisant la vitesse, ou vecteur dérivé du point $M(t)$, obtenu en dérivant les composantes :

$$(3) \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dy}{dt} \vec{e}_2.$$

On remarque qu'on peut écrire $\vec{OM}(t) = M(t) - O(t)$ (relation de Chasles) et que le point O est fixe (il ne dépend pas du temps). Donc la dérivée du vecteur $\vec{OM}(t)$ par rapport au temps est identique au vecteur dérivé du point $M(t)$, présenté à la relation (3).

- on fait l'hypothèse technique suivante: le vecteur $\vec{v}(t)$ n'est jamais nul, quel que soit t dans l'intervalle $[a, b]$:

$$(4) \quad \forall t \in [a, b], \vec{v}(t) \neq \vec{0}.$$

En introduisant la norme $\|\vec{v}(t)\|$ du vecteur $\vec{v}(t)$,

$$(5) \quad \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

on constate que $\vec{v}(t) = \vec{0}$ équivaut à $\|\vec{v}(t)\| = 0$, c'est à dire $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$. Donc l'hypothèse (4) peut aussi s'écrire

$$(6) \quad \forall t \in [a, b], \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0.$$

$$M(a) = A$$

3

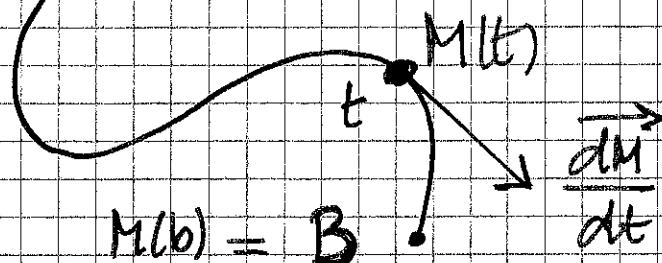


Figure 1. Vecteur tangent.

- Le vecteur vitesse permet de définir la droite tangente au point $M(t)$: c'est la droite passant par $M(t)$ et dirigée par dM/dt . d'hypothèse (4) [ou (6)] assure que cette droite est toujours bien définie dans ce cadre. Si en certains points, l'hypothèse (4) peut être en défaut, la définition de la droite tangente demande plus de travail. Nous renvoyons le lecteur aux cours classiques sur le sujet.
- Dans le cas (2) d'une courbe fonctionnelle, on a

$$(7) \quad \frac{dM}{dx} = (1, f'(x)) \in \mathbb{R}^2$$

car il suffit de dériver la relation (2) par rapport à la variable réelle x . Donc l'hypothèse (4) est toujours satisfaite [exercice: expliquer pourquoi en détail!].

Dans le repère cartésien (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , la droite tangente au point $(x_0, f(x_0))$ a pour pente le nombre dérivé $f'(x_0)$ et a une équation dans ce repère qui peut s'écrire

$$(8) \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- L'accélération est la dérivée en temps du vecteur vitesse, lorsque les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fois dérivables.

$$(9) \quad \frac{d^2 \vec{M}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{e}_1 + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{e}_2.$$

- Calcul vectoriel.

on se donne une fonction vectorielle $[a, b] \ni t \mapsto \vec{u}(t) \in \mathbb{R}^2$, avec ses deux coordonnées $u_1(t)$ et $u_2(t)$:

$$(10) \quad \vec{u}(t) = u_1(t) \vec{e}_1 + u_2(t) \vec{e}_2, \quad a \leq t \leq b.$$

on se donne aussi $\vec{v}(t) \in \mathbb{R}^2$ défini de façon analogue: $\vec{v}(t) = v_1(t) \vec{e}_1 + v_2(t) \vec{e}_2$.

- Le produit scalaire $(\vec{u}(t), \vec{v}(t))$ est invariant.

nant une fonction du temps :

$$(11) \quad (\vec{u}(t), \vec{v}(t)) = u_1(t)v_1(t) + u_2(t)v_2(t).$$

Il se dérive en généralisant au produit scalaire la régle de Leibniz de dérivation d'un produit :

$$(12) \quad \frac{d}{dt} (\vec{u}(t), \vec{v}(t)) = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{v}(t) \right) + \left(\vec{u}(t), \frac{d\vec{v}}{dt} \right).$$

La preuve est un exercice laissé au lecteur.

- La norme $\|\vec{u}(t)\|$ du vecteur $\vec{u}(t)$ est la racine du carré scalaire $(\vec{u}(t), \vec{u}(t))$:

$$(13) \quad \|\vec{u}(t)\| = \sqrt{(\vec{u}(t), \vec{u}(t))}.$$

On a

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \|\vec{u}(t)\|^2 = 2 \left(\vec{u}(t), \frac{d\vec{u}}{dt} \right),$$

ce qui constitue un nouvel exercice pour le lecteur.

Prop Vecteur de norme constante

Soit $t \mapsto \vec{u}(t)$ un vecteur du plan donné par la relation (10). Si la norme $\|\vec{u}(t)\|$ de ce vecteur est constante, alors le

Le vecteur dérivé $\frac{d\vec{u}}{dt}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}(t)$:

$$(15) \quad \|\vec{u}(t)\| = \text{cte} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{u}(t) \right) = 0.$$

Preuve.

On utilise la relation (14). Le membre de gauche est nul car $\|\vec{u}(t)\|$ est une constante, donc c'est aussi le cas pour $\|\vec{u}(t)\|^2$. Donc le membre de droite est nul également, ce qui exprime la relation (15).

- Nous définissons le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ lié à un point M du plan différent de l'origine:

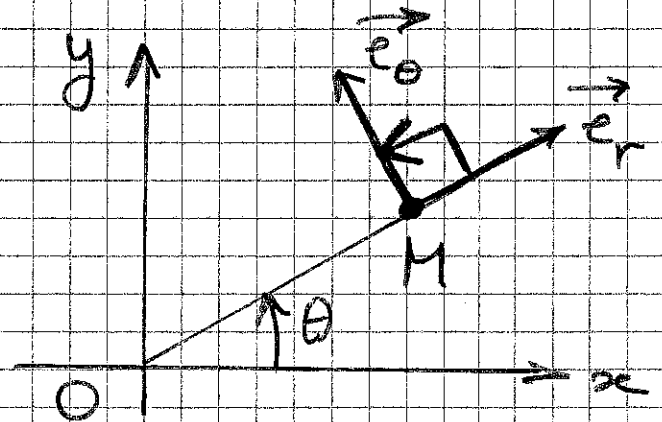


Fig 2. Repère local des coordonnées polaires.

$$(16) \quad M \neq O$$

(voir la figure 2).

Le vecteur \vec{e}_r est le vecteur unitaire colinéaire à \vec{OM} et de même sens:

$$(17) \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}, \quad M \neq O.$$

Si on note θ l'angle de \vec{Ox} et de
la demi-droite OM , on a

$$(18) \quad \vec{e}_r(\theta) = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Le vecteur $\vec{e}_r(\theta)$ est mobile en fonction du
point M . Le vecteur $\vec{e}_\theta(\theta)$ s'obtient en
tournant \vec{e}_r de $+\pi/2$ (voir la figure 2). On
a donc

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta(\theta) &= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_1 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_2 \\ &= -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Nous retenons

$$(19) \quad \vec{e}_\theta(\theta) = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Prop Dérivée du repère mobile.

Avec les définitions (18)(19) des vecteurs
 \vec{e}_r et \vec{e}_θ , on a

$$(20) \quad \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r.$$

Preuve

Conséquence directe des relations (18)(19) et
des dérivées classiques $\frac{d}{d\theta}(\cos \theta) = -\sin \theta$,
 $\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) = \cos \theta$. \square

- Les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont tous deux de norme 1

$$(21) \quad \|\vec{e}_r(\theta)\| = \|\vec{e}_\theta(\theta)\| = 1.$$

Le fait que $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \perp \vec{e}_r$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \perp \vec{e}_\theta$ est une conséquence directe de (15) et de l'orthogonalité

$$(22) \quad (\vec{e}_r(\theta), \vec{e}_\theta(\theta)) = 0.$$

- Nous développerons dans un chapitre ultérieur les "courbes" définies en polaires, c'est à dire de la forme

$$(23) \quad \vec{OM} = \rho(\theta) \vec{e}_r(\theta),$$

où $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est une fonction donnée régulière de la variable réelle θ .

- Construction d'une formule.

Comment définir la longueur L de la courbe \widehat{AB} représentée par exemple Figure 1 et décrite par les fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ de la relation (1)? Nous allons y répondre (sans la justifier entière).

ment) à une expression algébrique pour une telle grandeur. 9

- o la première idée est de couper l'intervalle $[a, b]$ en N morceaux que nous supposons égaux pour simplifier l'exposé :

$$(24) \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad t_j = jh, \quad 0 \leq j \leq N.$$

on a donc

$$(25) \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_j < t_{j+1} < \dots < t_N = b.$$

on pose $M_j \equiv M(t_j)$. on approche la longueur L par la longueur L_N de la ligne polygonale $A = M_0, M_1, \dots, M_j, M_{j+1}, \dots, M_N = B$.

$$(26) \quad L_N = \sum_{j=0}^{N-1} \left\| \overrightarrow{M_j M_{j+1}} \right\|.$$

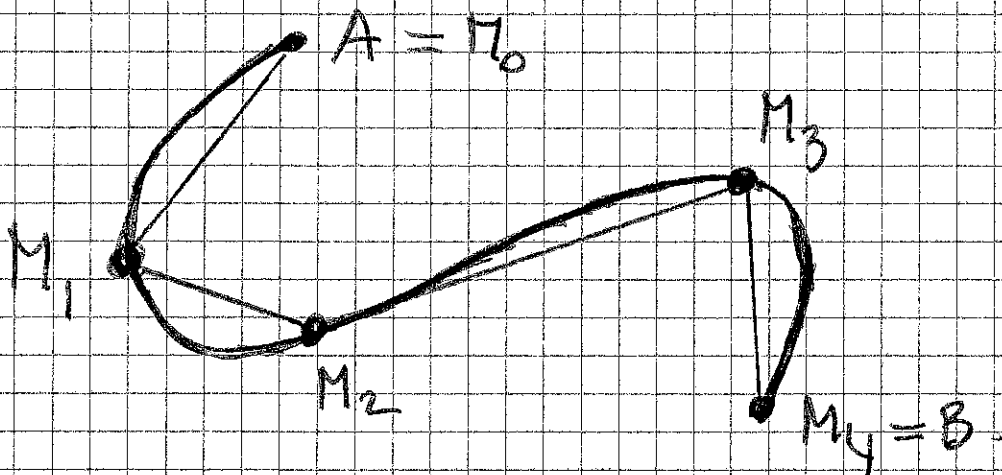


Figure 3. Approximation polygonale.

- Pour estimer le membre de droite de (26), on développe d'abord le vecteur $\overrightarrow{M_j M_{j+h}}$ sur la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) :

$$(27) \overrightarrow{M_j M_{j+h}} = (x(t_j+h) - x(t_j))\vec{e}_1 + (y(t_j+h) - y(t_j))\vec{e}_2.$$

on peut ensuite développer $x(t_j+h) - x(t_j)$ [et de façon analogue $y(t_j+h) - y(t_j)$] lorsque h est petit.

Prop. différentiabilité.

Si $t \mapsto x(t)$ est dérivable en t_j , alors il existe $\varepsilon_j^x(h)$ qui tend vers 0 si h tend vers 0 de sorte que

$$(28) x(t_{j+h}) - x(t_j) = \frac{dx}{dt}(t_j) h + h \varepsilon_j^x(h).$$

La relation (28) [avec $\varepsilon_j^x(h) \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$] exprime que la fonction $t \mapsto x(t)$ est différentiable au point t_j .

Preuve.

Si la fonction $x(t)$ est dérivable en t_j , le quotient $\frac{1}{h}(x(t_j+h) - x(t_j))$ tend vers $\frac{dx}{dt}(t_j)$ si h tend vers zéro. En d'autres termes, la différence

$$\frac{1}{h}[x(t_j+h) - x(t_j)] - \frac{dx}{dt}(t_j)$$

tend vers zéro si h tend vers zéro. On pose

$$(29) \quad \xi_j^x(h) \equiv \frac{1}{h} (x(t_j+h) - x(t_j)) - \frac{dx}{dt}(t_j).$$

Alors $\xi_j^x(h) \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$ et si $h \neq 0$, la relation (29) est clairement équivalente à (28). □

- on a bien entendu une relation analogue à (28) pour la seconde composante si elle est dérivable :

$$(30) \quad y(t_j+h) - y(t_j) = \frac{dy}{dt}(t_j) h + h \xi_j^y(h),$$

or $\xi_j^y(h)$ tend vers 0 si h tend vers zéro. On injecte ensuite les relations (28) et (30) au sein de (27); sans oublier la relation (3):

$$(31) \quad \vec{M}_j \cdot \vec{M}_{j+h} = \frac{d\vec{M}}{dt}(t_j) h + h (\xi_j^x \vec{e}_1 + \xi_j^y \vec{e}_2)$$

on élève la relation (31) au carré :

$$\begin{aligned} \|\vec{M}_j \cdot \vec{M}_{j+h}\|^2 &= h^2 \left\{ \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t_j) \right\|^2 + \left\| \xi_j^x \vec{e}_1 + \xi_j^y \vec{e}_2 \right\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_j \cdot (\xi_j^x \vec{e}_1 + \xi_j^y \vec{e}_2) \right\} \\ &= h^2 \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t_j) \right\|^2 [1 + \tilde{\eta}_j(h)] \end{aligned}$$

où $\tilde{\eta}_j(h) \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$, ceci car $\left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t_j) \right\| \neq 0$ [cf (4) ou (6)] on prend la racine carrée de l'expression précédente et il existe $\eta_j(h)$

qui tend vers zéro si h tend vers zéro de sorte que 12

$$(32) \quad \|\vec{M}_j - \vec{M}_{j+1}\| = h \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t_j) \right\| + h \gamma_j(t_j), \quad 0 \leq j \leq N-1$$

ou somme les relations (32) pour toutes les valeurs de j ; compte tenu de (26), on a

$$(33) \quad L_N = \sum_{j=0}^{N-1} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t_j) \right\| h + h \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_j(t_j).$$

- Si $a < b$ pour deux réels et $[a, b] \ni t \mapsto M(t) \in \mathbb{R}^2$ est un point de \mathbb{R}^2 continuellement dérivable, l'expression L_N calculée en (33) tend vers une limite si $N \rightarrow \infty$ (donc $h = (b-a)/N$ tend vers 0), d'où l'intégrale

$$(34) \quad L = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt.$$

Ce résultat demande quelques notions d'une discipline mathématique particulière, l'analyse mathématique. Nous ne le détaillons pas dans le cadre de ce cours.

def Longueur de la courbe \widehat{AB}

Dans les conditions précédentes de continue dérivabilité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$, la longueur L de la courbe \widehat{AB} (avec $M(a) = A$ et $M(b) = B$) est donnée par l'expression (34)

• Exemples.

Le cercle de rayon R , paramétré par l'angle $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$(35) \quad \vec{OM}(\theta) = R \vec{e}_r(\theta)$$

Alors $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = R \vec{e}_\theta$ (cf (20)) et $\|\frac{d\vec{M}}{d\theta}\| = R$.

Donc $L = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$ on s'y attendait!

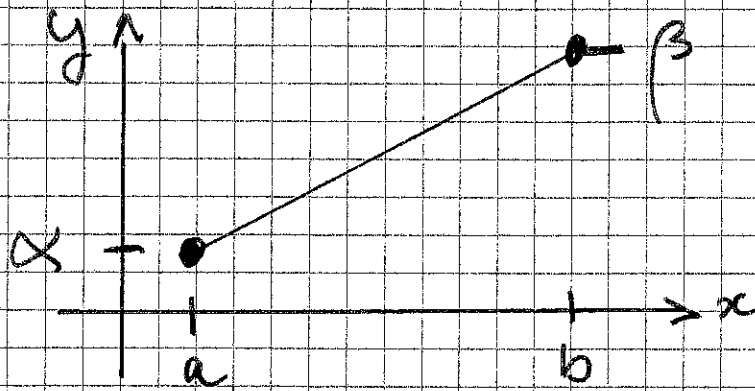
* Pour une courbe fonctionnelle de type (2), le vecteur $\frac{d\vec{M}}{dx}$ est donné à la relation (7) ou en déduisant

$$\|\frac{d\vec{M}}{dx}\|^2 = 1 + (f'(x))^2, \quad \|\frac{d\vec{M}}{dx}\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$(36) \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Une telle intégrale est de calcul souvent difficile, parfois impossible avec les "fonctions élémentaires" construites à partir de la fonction exponentielle.

* longueur d'un segment de droite (!)
on vérifie que la relation (36) redonne bien la longueur du segment dessiné Figure 4.



14

Figure 1 Segment de droite ($a < b$)

on explicite la fonction affine f telle que

$$(37) \quad f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta :$$

on a simplement

$$(38) \quad f(x) = \frac{x-a}{b-a} \beta + \frac{b-x}{b-a} \alpha, \quad a \leq x \leq b$$

Donc $f'(x) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$, $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{b - a}\right)^2}$

et $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = (b-a) \sqrt{1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{b - a}\right)^2}$
 $= \sqrt{(b-a)^2 + (\beta - \alpha)^2}.$

on s'y attendait également!

Julian S

25 sept 2013.

• Exercices

1) on paramètre le demi-cercle $x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$ par l'approche fonctionnelle

$$y = f(x) \equiv \sqrt{R^2 - x^2}$$

Calculer sa longueur à l'aide de la relation (36). On pourra remarquer que $\frac{d}{dx}(\text{Arctan } x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2) La chaînette $y = \cosh x$ ($x \in \mathbb{R}$) a une longueur entre les abscisses 0 et $X > 0$ qui s'exprime facilement à partir de (36). On pourra utiliser les relations $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

3) La courbe "logarithme" $y = \ln x$ a une longueur entre $x=1$ et $x=X > 1$ qui s'exprime avec une expression algébrique assez longue.

4) Pour l'ellipse $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ (avec $0 < b < a$ pour fixer les idées) sa longueur peut être écrite avec une intégrale qu'on précisera. Mais celle-ci ne peut pas s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires, contrairement aux trois premiers exercices.