• STN 2, Analyse Vectorielle •

③ Abscisse curviligne

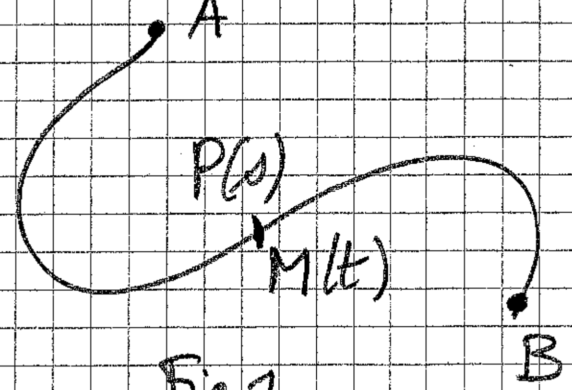

Fig 1

• On se donne une courbe paramétrée $M(t)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$; en pratique deux fonctions

$$[a,b] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad [a,b] \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$$

de sorte que

(1) $\quad \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{e}_1 + y(t)\,\vec{e}_2, \quad a \leq t \leq b,$

où $a<b$ sont deux nombres réels; on suppose les fonctions x et y <u>dérivables</u> autant que de besoin. On a vu que la longueur L de l'arc $\widehat{AB}$ (Fig 1), où $A = M(a)$, $B = M(b)$, est donné par

(2) $\quad L = \displaystyle\int_a^b \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt.$

- Si on se donne $t \in [a,b]$, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM(t)}$ est donnée par une intégrale analogue à (2), on la note

$$(3) \quad \Sigma(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| d\theta, \quad a \leq t \leq b$$

on a les deux relations

$$(4) \quad \Sigma(a) = 0, \quad \Sigma(b) = L$$

(il suffit de faire successivement $t=a$ et $t=b$ dans la relation (3)). La fonction $t \mapsto \Sigma(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dès que $\theta \mapsto M(\theta)$ est une fonction continûment dérivable. On a

$$(5) \quad \Sigma'(t) = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\|, \quad a < t < b.$$

- La fonction $[a,b] \ni t \mapsto \Sigma(t) \in [0,L]$ est strictement croissante dès que le vecteur $\frac{d\vec{M}}{dt}$ ne s'annulle pas et elle est continue car dérivable. Donc elle réalise une <u>bijection</u> de l'intervalle $[a,b]$ sur l'intervalle $[0,L]$:

$$(6) \quad \forall s \in [0,L], \exists! t \in [a,b], \Sigma(t) = s.$$

On note $T(s)$ la fonction réciproque de Σ. A s donné dans $[0,L]$, $T(s)$ est le nombre $t \in [a,b]$ de la relation (6) de sorte que $\Sigma(T(s)) \equiv s$.

- Au lieu de paramétrer la courbe $\widehat{AB}$ par le "temps" $t \in [a,b]$, il est plus naturel du point de vue géométrique de la paramétrer par l'élément de longueur* $s \in [0,L]$. Le même point géométrique peut s'écrire à la fois $M(t)$ et $P(s)$ (Fig 1), avec

$$(7) \qquad P(s) = M(T(s)), \quad 0 \leq s \leq L.$$

- On introduit le vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$ obtenu en dérivant le point P par rapport à s.

Prop Le vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$ est unitaire.

$$(8) \qquad \vec{\tau}(s) = \frac{dP}{ds}, \qquad 0 \leq s \leq L$$

$$(9) \qquad \|\vec{\tau}(s)\| = 1.$$

* appelé aussi "abscisse curviligne".

- **Preuve.**

On calcule $\vec{\tau}$ par composition des dérivées :

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \frac{d\vec{M}}{dt}(T(s)) \cdot \frac{dT}{ds} = \frac{d\vec{M}}{dt}(T(s)) \quad \frac{1}{\frac{d\Sigma}{dt}}$$

avec Σ défini en (3). or $\frac{d\Sigma}{dt} = \Sigma'(t)$ calculé à la relation (5) vaut exactement $\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|$. D'où

$$(10) \qquad \vec{\tau} = \frac{d\vec{M}/dt}{\left\| d\vec{M}/dt \right\|} ;$$

c'est bien un vecteur unitaire. $\square$

- **Courbe en coordonnées polaires.**

On se donne une fonction $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \rho(\theta) \in \mathbb{R}$ qu'on suppose assez régulière. La courbe en polaire associée à ρ est l'ensemble des points $M(\theta) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que

$$(11) \qquad \vec{OM}(\theta) = \rho(\theta) \quad \vec{e_r}(\theta), \ \theta \in \mathbb{R}$$

L'important est de savoir réduire l'intervalle de variation de θ. On a d'une part

$$(12) \qquad x(\theta) = \rho(\theta) \cos\theta, \quad y(\theta) = \rho(\theta) \sin\theta$$

et d'autre part les parité des fonctions sinus et cosinus.

- Si ρ est paire $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$, alors la courbe "en polaires" donnée en (11) est symétrique par rapport à l'axe des x [exercice laissé au lecteur!]

Si ρ est impaire, c'est à dire $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, on a $x(-\theta) = \rho(-\theta)\cos(-\theta) = -x(\theta)$ et $y(\theta) = \rho(-\theta)\sin(-\theta) = y(\theta)$ et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y.

Si $\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$, on prouve de même que la courbe est invariante par rapport à l'axe des y [nouvel exercice]

- un premier exemple est le cercle, où

(13) $\rho(\theta) = R, \ \theta \in \mathbb{R}$

est une fonction constante. Il s'agit bien entendu du cercle de centre l'origine et de rayon R. Un second exemple correspond à

(14) $\rho(\theta) = a\theta, \ \theta \in \mathbb{R}$

avec $a > 0$ pour fixer les idées. Il

s'agir de la spirale d'Archimède, symétrique par rapport à l'axe Oy (Figure 2).

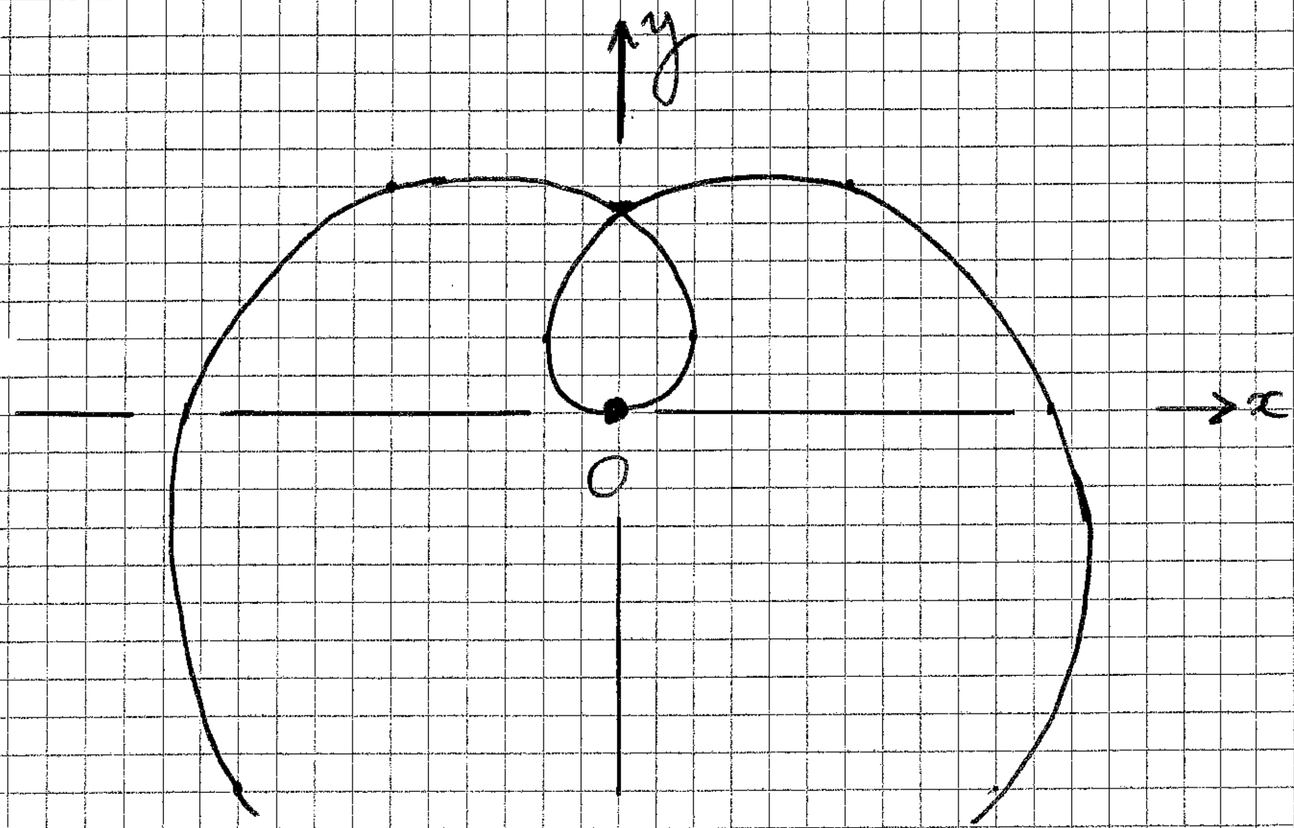

Fig 2 Spirale d'Archimède

- On calcule la direction tangente à la courbe en polaires représentée par (11) en dérivant cette relation, sachant que

(15) $\dfrac{d}{d\theta}\vec{e_r} = \vec{e_\theta}$, $\dfrac{d}{d\theta}\vec{e_\theta} = -\vec{e_r}$.

alors

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\rho(\theta)\,\overrightarrow{e_r}(\theta)\right]$$

$$= \rho'(\theta)\,\overrightarrow{e_r} + \rho(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$$(16) \quad \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \rho'(\theta)\overrightarrow{e_r} + \rho(\theta)\overrightarrow{e_\theta}.$$

Le vecteur "vitesse" $\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}$ est naturellement décomposée dans la base orthonormée (variable!) $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$. On a donc

$$(17) \quad \left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\right\|^2 = (\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

On suppose cette grandeur non nulle. Si $\rho(\theta) = 0$, c'est à dire en un point où la courbe passe par l'origine, on a simplement $d\overrightarrow{M}/d\theta = \rho'(\theta)\,\overrightarrow{e_r}$ et l'angle de Ox avec la tangente vaut exactement θ [voir par exemple la tangente à la spirale d'Archimède pour $M(0) = 0$].

- Trois expressions du ds^2.

En pratique, on confond la fonction $\Sigma(t)$ introduite en (3) avec la lettre s, l'abscis.

se curviligne. La relation (5) peut se réécrire $\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|$, ou plus simplement

(18) $$ds = \| d\vec{M} \| .$$

Comme $ds \geq 0$, il suffit d'écrire son carré, "le ds^2", c'est à dire :

(19) $$ds^2 = \| d\vec{M} \|^2 .$$

- Pour une courbe paramétrée générale (1), on a donc

(20) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 .$$

Dans le cas d'une courbe fonctionnelle $y = f(x)$, la relation (20) s'écrit

(21) $$ds^2 = \left[1 + (f'(x))^2 \right] dx^2$$

et pour une courbe en coordonnées polaires, on a (cf (17)) :

(3) $$ds^2 = \left[(\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta) \right] d\theta^2$$

Dubois

3 octobre 2013.

Exercices.

- Calculer la longueur d'un arc de chaînette [cf cours numéro 2]
- Calculer la longueur d'un arc de parabole
  $y = \frac{1}{2a} x^2, \quad a > 0$.
- Calculer la longueur d'un arc de spirale d'Archimède. On pourra utiliser la fonction argsh, fonction réciproque du sinus hyperbolique, après avoir remarqué (et démontré!) qu'on a
  $\frac{d}{dt}(\operatorname{Argsh} t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
- Etudier la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = a \cos\theta$. Quelle est sa longueur?
- Mêmes questions pour la courbe $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$.