STN2, Analyse Vectorielle.

(4) Normale, Courbure, Intégrale Curviligne

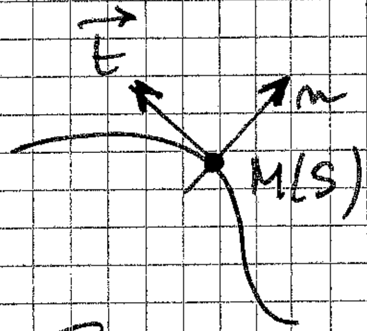


Fig 1.

- On se donne un arc de courbe Γ paramétré par l'abscisse curviligne s. On sait qu'on a

(1) $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

En conséquence, le vecteur tangent $\vec{t} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ (Fig 1) est unitaire : $\|\vec{t}\| = 1$. Donc la dérivée $\frac{d\vec{t}}{ds}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{t}$. Comme nous nous plaçons à deux dimensions d'espace, il n'y a qu'une seule direction possible.

- On introduit un vecteur normal $\vec{n}$ unitaire, orthogonal à $\vec{t}$ et tel que la base (locale) $(\vec{n}, \vec{t})$ soit directe. Si $\vec{t}$ est donné par

(2) $$\vec{t} = \frac{dx}{ds}\vec{e_1} + \frac{dy}{ds}\vec{e_2},$$

le vecteur $\vec{n}$ se calcule selon

(3) $$\vec{n} = \frac{dy}{ds}\vec{e_1} - \frac{dx}{ds}\vec{e_2} \quad \text{(cf Fig 1)}$$

(def) Courbure

La courbure ρ est définie par

(4) $$\frac{d\vec{t}}{ds} = -\rho \vec{n}$$

[avec le choix fait en (2),(3)].

(ex) Cercle

on a $x(s) = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $ds = R\,d\theta$.

Alors $\vec{t} = \vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{e_2}$,

$\frac{d\vec{t}}{d\theta} = -\vec{e_r} = -\vec{n}$, donc

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}} \frac{d\vec{t}}{d\theta} = \frac{1}{R}(-\vec{n}) \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{R}$$

(def) Rayon de courbure.

Avec les choix faits en (2)(3) et (4), on pose

(5) $$R = \frac{1}{\rho},$$

rayon de courbure de la courbe Γ au point courant $M(s)$. Pour un cercle, ce rayon est constant et il est infini pour une droite [exercice !]

Prop Dérivée du vecteur normal.

Avec les choix faits en (2)(3) et (4), on a

(6) $\dfrac{d\vec{n}}{ds} = \rho \vec{t}$.

Preuve.

Comme la normale est unitaire $\dfrac{d\vec{n}}{ds}$ est orthogonal à $\vec{n}$, donc colinéaire à $\vec{t}$ (car nous travaillons dans le plan $\mathbb{R}^2$) ; on peut donc chercher α de sorte que $\dfrac{d\vec{n}}{ds} = \alpha \vec{t}$.
On dérive ensuite le produit scalaire $(\vec{t}, \vec{n})$, identiquement nul. Donc

$$0 = \frac{d}{ds}(\vec{t},\vec{n}) = \left(\frac{d\vec{t}}{ds}, \vec{n}\right) + \left(\vec{t}, \frac{d\vec{n}}{ds}\right)$$

$$= (-\rho\vec{n},\vec{n}) + (\vec{t}, \alpha\vec{t})$$

$$= -\rho(\vec{n},\vec{n}) + \alpha(\vec{t},\vec{t}) = -\rho + \alpha$$

car les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont unitaires.
Donc $\alpha = \rho$ et la relation (6) est établie. $\square$

Prop Courbure d'une "courbe fonctionnelle".

Si $y = f(x)$, la courbure est donnée par

(7) $\rho = \dfrac{f''}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}$

Preuve.

On a $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + f(x)\vec{e_2}$, donc

$$ds^2 = (1+(f')^2)\,dx \quad \text{et}$$

$$(8) \quad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\left(1, f'(x)\right)$$

Donc

$$(9) \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\left(f'(x), -1\right) \qquad [\text{cf}(2)(3)]$$

on dérive $\vec{t}$ par rapport à s et on fait apparaître $\vec{n}$; le coefficient vaut alors $-\rho$, comme suggéré en (6). On a :

$$\frac{\overrightarrow{dt}}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}(1, f')\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\left[-\frac{1}{2}\frac{2f'f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}(1,f') + \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}(0,f'')\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\frac{1}{(1+(f')^2)^{3/2}}\left[-f'f''(1,f') + (1+(f')^2)(0,f'')\right]$$

$$= \frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}(-f', 1) = \frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}(-\vec{n})$$

et la relation (7) est alors conséquence directe de (6). $\square$

• D'un point de vue géométrique, si on introduit le centre de courbure C via la relation

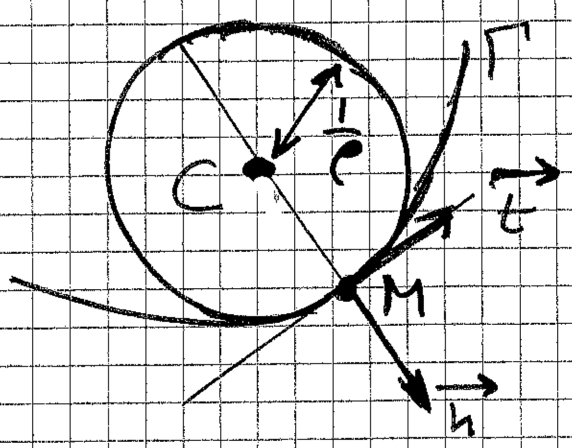


Fig 2 Centre de courbure.

(4e) $\vec{MC} = -\frac{1}{\rho}\vec{n}$

(cf Fig 2), le cercle de centre C et de rayon $\frac{1}{\rho}$ est "le cercle le plus proche" de la courbe Γ au voisinage du point M. C'est le centre de courbure au point M. Il varie avec le point (sauf dans le cas du cercle !).

Pour une courbe fonctionnelle, il est situé "au dessus" de la courbe si $f''>0$ (courbure ρ positive) et il est situé ("au dessous" (de la courbe si $f''<0$. Un point $(x, f(x))$ où $f''(x)=0$ s'appelle un <u>point d'inflexion</u> (Fig 3). La courbe traverse sa tangente

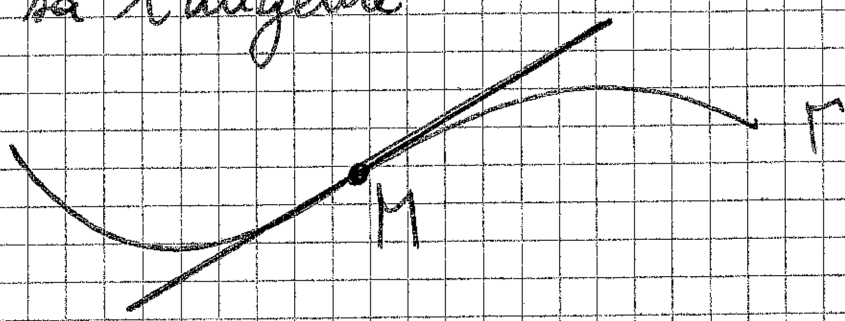


Fig 3. Point d'inflexion

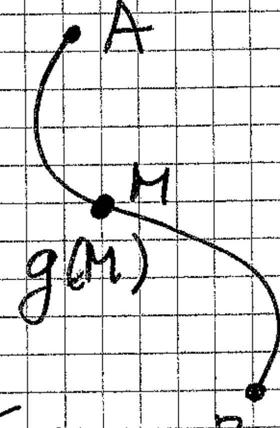


Fig 4

• On se donne une courbe $\Gamma = \widehat{AB}$; on la suppose assez régulière pour posséder une abscisse curviligne s. On se donne une fonction numérique $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ qui à tout point $M \in \Gamma$ associe le nombre $g(M) \in \mathbb{R}$ (Fig 4). La question posée est de définir et calculer l'intégrale curviligne

(11) $\quad I = \int_\Gamma g(M)\, ds(M)$.

• On paramètre la courbe Γ par deux fonctions $[a,b] \ni \theta \mapsto (x(\theta), y(\theta)) \in \mathbb{R}^2$. Alors la composée $\hat{g}(\theta) = g(M(\theta))$ décrit la fonction g "vue à l'aide du paramétrage" $\theta \in [a,b]$. On sait aussi que l'abscisse curviligne ds s'exprime simplement en fonction de θ (cf (1)) :

(12) $\quad \dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2} \geq 0$.

Quand on remplace $g(M)$ et $ds(M)$ par leur valeur (11) et (12) et qu'on suppose pour fixer les idées

(13) $\quad M(a) = A, \quad M(b) = B,$

l'intégrale I peut s'écrire

(14) $$I = \int_a^b \hat{g}(\theta)\, \frac{ds}{d\theta}\, d\theta .$$

- Le point important du point de vue mathématique est de s'assurer qu'un changement de paramétrage ne modifie pas la valeur finale de l'intégrale (11). Echangeons par exemple les sommets A et B, toutes choses égales par ailleurs. On définit pour cela un nouveau paramètre ξ de sorte que θ et ξ sont reliés simplement ; si $\xi = a$, alors le point $\overline{M}(a)$ [changement de notation car ce n'est plus le même paramétrage de la courbe!] vaut B, c'est à dire $\theta = b$. De façon analogue si $\xi = b$, $\overline{M}(b) = A$, soit $\theta = a$. Si on choisit ξ fonction affine de θ, on a

(15) $$\theta = a + b - \xi ,$$

ce qui définit une fonction affine $\varphi(\xi) = a+b-\xi$ de $[a,b]$ sur lui-même, mais non triviale puisqu'elle échange les extrémités et le sens de parcours : $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$.
La fonction $g(M)$ devient $\tilde{g}(\xi) = \hat{g}(\varphi(\xi))$, l'abscisse curviligne s est maintenant fonction de ξ et une nouvelle valeur candi-

date pour I donné en (11) et $\tilde{I}$ donnée par

$$(16) \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{g}(\xi) \frac{d\tilde{s}}{d\xi} \, d\xi .$$

A-t-on I (calculé en (14)) égal à $\tilde{I}$ de la relation (16) ? La réponse est oui. On effectue le changement de variable $\theta = \varphi(\xi)$ dans (14), sachant que $\hat{g}(\varphi(\xi)) = \tilde{g}(\xi)$ et $\tilde{s}(\xi) = s(b) - s(\theta)$ puisque la longueur de Γ vaut $s(b) - s(a)$ et $\tilde{s}(a)$ doit être nul par construction [l'abscisse curviligne au point de démarrage de la courbe est toujours nulle]. Donc

$$\frac{d\tilde{s}}{d\xi} = -\frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{ds}{d\theta} \quad \text{et reste} \geq 0 \; !$$

Avec les formules de changement de variable rappelées au chapitre 1, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \hat{g}(\varphi(\xi)) \frac{ds}{d\theta} |\varphi'(\xi)| \, d\xi \\ &= \int_a^b \tilde{g}(\xi) \frac{d\tilde{s}}{d\xi} \, d\xi \quad \text{car } \frac{d\tilde{s}}{d\xi} = \frac{ds}{d\theta} \text{ et } |\varphi'| = 1 \\ &= \tilde{I} . \end{aligned}$$

- Dans le cas général d'un changement de variable bijectif $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, avec toujours $\alpha < \beta$ mais sans préciser si φ

est croissante ou décroissante, c'est à dire le point de départ de la courbe (!), le changement de variable $\theta = \varphi(\xi)$ permet d'écrire $\tilde{g}(\xi) = \hat{g}(\varphi(\xi))$ comme plus haut.
De plus $\tilde{s}(\xi)$ est tel que $\frac{d\tilde{s}}{d\xi} \geq 0$. On a aussi

$$\frac{d\tilde{s}}{d\xi} = \frac{d\tilde{s}}{d\theta}\frac{d\theta}{d\xi} = \left|\frac{ds}{d\theta}\right|\left|\frac{d\theta}{d\xi}\right| = \frac{ds}{d\theta}\,|\varphi'(\xi)|\,.$$

Le changement de variable $\theta = \varphi(\xi)$ dans (14) s'écrit donc

$$I = \int_\alpha^\beta \hat{g}(\varphi(\xi))\,\frac{ds}{d\theta}\,|\varphi'(\xi)|\,d\xi = \int_\alpha^\beta \tilde{g}(\xi)\,\frac{d\tilde{s}}{d\xi}\,d\xi\,,$$

expression identique à (16) à ceci près que les bornes s'appellent maintenant α et β. $\square$

- Ce long développement permet au praticien de calculer l'intégrale curviligne (11) à l'aide de l'intégrale ordinaire (14) sans aucun état d'âme!

Dubois
Mai 2013

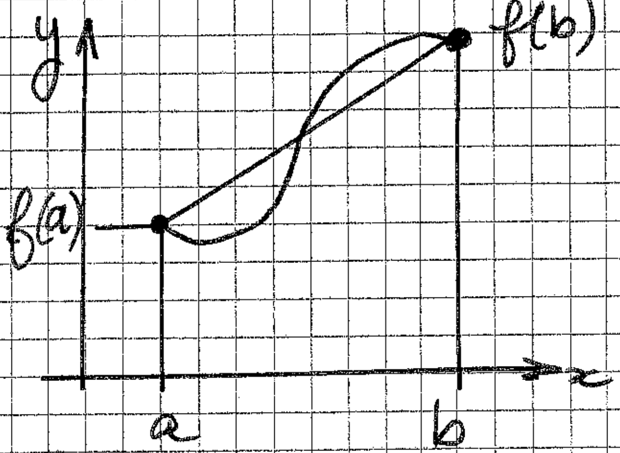
Complément de cours

Calcul approché d'une intégrale par la méthode des trapèzes

- On se donne $a < b$; on cherche à approcher la valeur de l'intégrale

(1) $I = \int_a^b f(x)\,dx$

(voir la figure ci-contre)



- On remplace f par son interpolée affine g, telle que

(2) $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$, g affine.

On approche I par l'intégrale de g, ce qui correspond à l'aire d'un trapèze, laquelle se calcule de façon élémentaire. D'où

(3) $$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a) + f(b)\right).$$

- La valeur approchée (3) n'est pas satisfaisante si l'intervalle $[a,b]$ est "grand". On le réduit à volonté en introduisant un entier $N \geq 1$, une grille régulière entre a et b de pas

(4) $$h = \frac{b-a}{N}, \quad N \text{ entier} \geq 1,$$

c'est à dire

(5) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{j-1} < x_j = a + jh < x_{j+1} < \dots < x_N = b$.

Alors on utilise d'abord la relation de Chasles

(6) $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$$

et ensuite on approche l'intégrale sur l'intervalle de longueur h à l'aide de (3) :

(7) $$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(x_j) + f(x_{j+1})\right).$$

On réunit (6) et (7) :

(8) $$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{2}\left(f(x_j) + f(x_{j+1})\right)$$

On note I_N le membre de droite de (8). On a sans difficulté

(9) $$I_N = h\left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{1}{2} f(b)\right)$$

et on a finalement

(10) $$\int_a^b f(x)\,dx \simeq I_N, \quad N \text{ entier} \geq 1.$$

- Si $N \nearrow \infty$, I_N tend vers $\int_a^b f\,dx$ avec une bonne précision dès que f est deux fois continûment dérivable.

Exercices

- Soit $a>0$. Calculer en fonction de $x \in \mathbb{R}$ le rayon de courbure du point d'abscisse x de la parabole d'équation $y = \frac{1}{2a} x^2$.
Quelle est sa valeur pour $x = 0$?
Montrer que si on note $C(x)$ l'équation du cercle de centre $(0,a)$ et rayon a, il on a au voisinage de $x=0$, $y=0$: $C(x) = \frac{x^2}{2a} + O(x^4)$

- Soit Γ le demi-cercle de centre O, rayon R, $y>0$
soit $\vec{n}$ le vecteur normal. Calculer $\int_\Gamma x\, n_1 \, ds$
où $\vec{n} = n_1 \vec{e_1} + n_2 \vec{e_2}$ et s est l'abscisse curviligne le long du cercle.

- Soit Γ la spirale d'Archimède $\rho = a\theta$ entre l'origine $(\theta = 0)$ et le point $A\,(\theta = \pi)$. Transformer l'expression de $\int_\Gamma x \, ds$ en une intégrale définie qu'on ne tente pas de calculer exactement.