(6) Introduction à l'intégrale double.

- L'intégrale simple sur un intervalle $[a,b]$ (avec deux réels $a<b$) satisfait aux quatre propriétés suivantes [voir le cours (1) de "AV"].

  * longueur

  (1) $$\int_a^b dx = b-a.$$

  * positivité

  (2) $$f \geqslant 0 \text{ sur }]a,b[\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

  * linéarité

  (3) $$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

  (4) $$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \left(\int_a^b f(x)\,dx\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

  * additivité par rapport au domaine

  (5) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a<c<b.$$

- On a l'analogue pour une intégrale double. Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, une réunion de rectangles pour fixer les idées. On note $|D|$ la surface d'un tel domaine;

Si D est le rectangle $]a,b[\times]c,d[$, on a

(6) $\qquad |\,]a,b[\times]c,d[\,| = (b-a)(d-c)\,,\quad a<b,\ c<d.$

on a pour l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ (qui est a priori un nombre réel), les quatre propriétés qui suivent

* surface

(7) $\qquad \displaystyle\iint_{]a,b[\times]c,d[} dx\,dy = (b-a)(d-c)\,,\quad a<b,\ c<d.$

* positivité

(8) $\qquad f \geq 0$ sur $D \Longrightarrow \displaystyle\iint_D f\,dx\,dy \geq 0$

* linéarité

(9) $\qquad \displaystyle\iint_D (f+g)\,dx\,dy = \iint_D f\,dx\,dy + \iint_D g\,dx\,dy$

(10) $\qquad \displaystyle\iint_D (\lambda f)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f\,dx\,dy$

* additivité par rapport au domaine

On suppose que D est l'union disjointe de rectangles $D_j \subset \mathbb{R}^2$ (avec N sous-domaines)

(11) $\qquad D = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} D_j$

(12) $\qquad k \neq l \Longrightarrow D_k \cap D_l = \emptyset$

alors

$$(13) \quad \iint_D f \, dx\, dy = \sum_{j=1}^{N} \iint_{D_j} f(x,y)\, dx\, dy \, .$$

- A partir des hypothèses (7) à (13), on peut calculer de nombreuses intégrales doubles.

On suppose $D =]a,b[\times]c,d[$ pour fixer les idées ; on découpe $]a,b[$ en N morceaux

$$(14) \quad a = x_0 < x_1 = x_0 + \frac{b-a}{N} < \dots < x_i = a + i\frac{b-a}{N} < \dots < x_N = b$$

et $]c,d[$ en M morceaux :

$$(15) \quad c = y_0 < y_1 = y_0 + \frac{d-c}{M} < \dots < y_j = c + j\frac{d-c}{M} < \dots < y_M = d.$$

On note $D_{i+1/2,\, j+1/2}$ le rectangle centré en $\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)$ de côtés $\frac{b-a}{N}$ et $\frac{d-c}{M}$:

$$(16) \quad D_{i+1/2,\, j+1/2} =]x_i, x_{i+1}[\times]y_j, y_{j+1}[, \begin{cases} 0 \le i \le N-1 \\ 0 \le j \le M-1 \end{cases}$$

On a alors

$$(17) \quad]a,b[\times]c,d[= \bigcup_{i=0}^{N-1} \bigcup_{j=0}^{M-1} D_{i+1/2,\, j+1/2} \, .$$

On a coupé le "grand rectangle" D en "petits rectangles" $D_{i+1/2,\, j+1/2}$.

On suppose f constante sur chaque $D_{i+1/2,\, j+1/2}$:

(18) $f(x,y) = f_{i+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}}$, $(x,y) \in D_{i+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}}$,
où $f_{i+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}}$ est un scalaire connu. Comme on a

(19) $$\left| D_{i+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}} \right| = \frac{|D|}{NM} ,$$

le calcul complet de $\int_D f$ conduit à

(20) $$\iint_D f \, dx\, dy = \frac{|D|}{MN} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f_{i+1/2,\, j+1/2} .$$

Le calcul de l'intégrale double d'une fonction constante sur chaque petit rectangle n'offre donc pas de difficulté particulière.

- Si la fonction f est "quelconque", disons <u>continue</u> $\overline{D} \to \mathbb{R}$ pour fixer les idées, on peut toujours l'approcher par une fonction de la forme (18), constante sur chaque rectangle $D_{i+1/2,\, j+1/2}$. Cette approximation est de plus en plus précise si N et M sont de plus en plus grands. Dans ce cas, la relation (20) est encore valable avec le signe d'égalité remplacé par "$\simeq$". Par ailleurs, un travail spécifique (non abordé ici) doit être mené pour prouver que l'intégrale double $\iint_D f \, dx\, dy$ est un nombre réel qui existe effectivement.

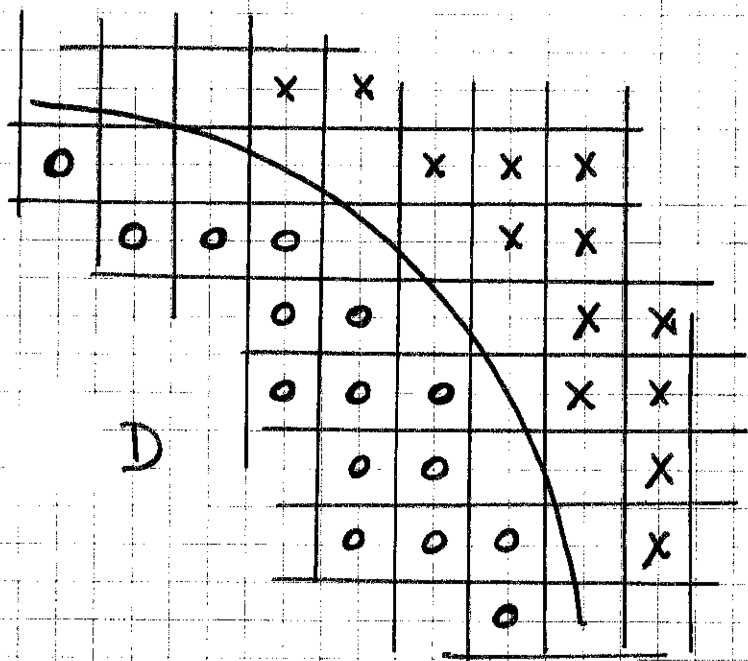

Figure 1 Approximation du domaine D de frontière courbe par un réseau de carrés.

• Si le domaine D a une frontière courbe régulière (voir la figure 1), on l'approche par un réseau de petits carrés de côté $h > 0$. Les carrés marqués d'une croix, extérieurs à D, ne contribuent pas aux sommes de la forme (20) qui permettent un calcul approché de l'intégrale. Les carrés marqués d'un cercle sont intérieurs au domaine D et définissent une approximation intérieure du domaine D (à l'échelle h des petits carrés). Les carrés non marqués forment une approximation de la frontière. La réunion de l'approximation intérieure et de l'approximation de la frontière constitue une approximation extérieure du domaine D à l'échelle h.

On dispose alors de deux approximations de l'intégrale $\int_D f$ à l'échelle h, de la forme (20). L'une avec l'approximation intérieure de D et l'autre avec l'approximation extérieure de D. Leur différence donne une bonne idée de l'erreur entre ces valeurs approchées et la valeur exacte de $\int_D f dx\, dy$.

• La positivité (8) conduit à des majorations utiles. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est bornée :

(21) $\exists M \geqslant 0, \forall (x,y) \in D, \quad |f(x,y)| \leqslant M$,

alors on a l'estimation

(22) $\quad -M\,|D| \leqslant \iint_D f dx\, dy \leqslant M|D|.$

* En effet, au vu de (21), $M - f(x,y)$ et $f(x,y)+M$ sont deux fonctions positives dont l'intégrale sur D est positive :

$$\int_D (M-f)\, dx\, dy \geqslant 0 , \quad \int_D (f+M)\, dx\, dy \geqslant 0 .$$

Ces inégalités entraînent immédiatement (22) puisque

(23) $\quad \iint_D dx\, dy = |D|$

qui généralise (7) à un domaine quelconque.

- De façon plus générale, on déduit de l'inégalité $-|f(x,y)| \leqslant f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$ l'encadrement $-\int_D |f| \leqslant \int_D f \leqslant \int_D |f|$, qui montre que

$$(24) \qquad \left| \iint_D f \, dx \, dy \right| \leqslant \iint_D |f(x,y)| \, dx \, dy$$

- Le calcul "analytique" d'une intégrale double est possible grâce au théorème de Fubini.

On se donne pour fixer les idées un domaine D comme sur la figure 2. On a deux réels $a<b$, une fonction continue $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ qu'on suppose strictement positive : $\varphi(x) > 0$ si $a < x < b$.

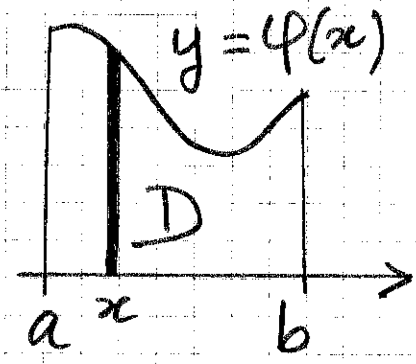

Fig. 2.

On sait que l'aire $|D|$ du domaine D défini par

$$(25) \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)\}$$

est donné par l'intégrale simple :

$$(26) \qquad |D| = \int_a^b \varphi(x) \, dx .$$

Mais cette surface est également donnée par une intégrale double ! On a la relation (23) ...

on écrit $\varphi(x)$ sous la forme

$$\varphi(x) = \int_0^{\varphi(x)} dy .$$

Alors l'égalité des deux expressions (23) et (26) pour calculer la surface du domaine D peut s'écrire

$$(27) \quad \iint_D dx\, dy = \int_a^b dx \int_0^{\varphi(x)} dy .$$

- on peut étendre la relation (27) [valable pour la fonction $f(x,y) \equiv 1$] aux constantes, aux sommes de fonctions, aux fonctions constantes sur une partie du domaine D, avec les techniques vues plus haut. En définitive, on peut établir la relation suivante

$$(28) \quad \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \left[\int_0^{\varphi(x)} dy\, f(x,y) \right]$$

valable pour toute fonction bornée sur le domaine D. La relation (28) est l'une des formes du théorème de Fubini qui permet le calcul effectif d'une intégrale double à l'aide d'intégrales simples. La relation (28) exprime qu'on doit d'abord considérer la fonction $g(x)$ à une seule variable définie par l'intégrale à x fixé :

(29) $\quad g(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy$

(voir la figure 2 à nouveau, où ce calcul à x constant est représenté). Puis on intègre g par rapport à x et le résultat est l'intégrale double cherchée :

(30) $\quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx.$

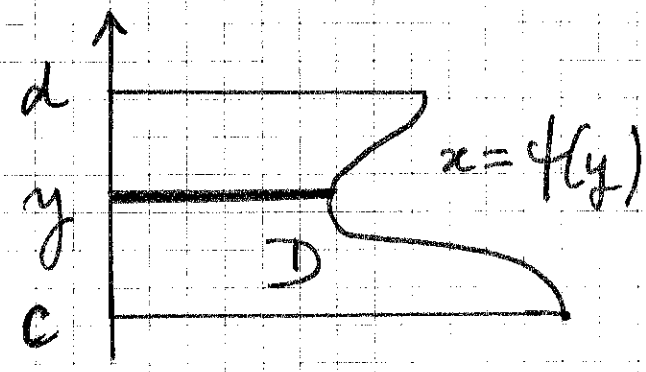

Fig 3

- on peut aussi échanger le rôle des variables. Si $c<d$ délimitent le domaine D, maintenant décrit avec une fonction $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ strictement positive (Fig 3), c'est à dire

(31) $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ c \leq y \leq d,\ 0 \leq x \leq \varphi(y)\}$,

la relation (28) devient

(32) $\quad \iint_D f\,dx\,dy = \int_c^d dy \left[\int_0^{\varphi(y)} dx\ f(x,y) \right]$

pour une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ bornée. On calcule d'abord $\tilde{g}(y)$ par intégration par rapport à x :

$$(33) \quad \tilde{g}(y) = \int_0^{\psi(y)} f(x,y)\, dx \, .$$

Puis on intègre $\tilde{g}$ entre c et d :

$$(34) \quad \iint_D f(x,y)\, dx dy = \int_c^d \tilde{g}(y)\, dy \, .$$

- Le théorème de Fubini exprime qu'<u>on intègre dans l'ordre que l'on veut</u> ; si D est représenté "à la fois" sous la forme (25) et (31), c'est à dire de façon générale

$$(35) \quad D = \begin{cases} \{(x,y),\ x_{min} \leq x \leq x_{max},\ \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x)\} \\ \{(x,y),\ y_{min} \leq y \leq y_{max},\ \psi_-(y) \leq x \leq \psi_+(x)\} \end{cases}$$

on a :

$$(36) \quad \iint_D f\, dx dy = \begin{cases} \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \left[\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} dy\, f(x,y) \right] \\ \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy \left[\int_{\psi_-(y)}^{\psi_+(y)} dx\, f(x,y) \right] . \end{cases}$$

- Vérifions sur un exemple simple la relation (36) avec $f \equiv 1$ et D le quart de disque

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\} \, .$$

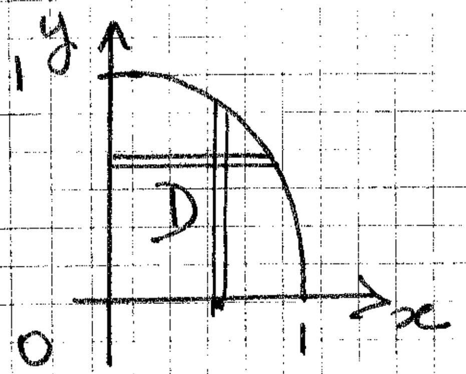

Fig 4

$$|D| = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

et $$|D| = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy,$$

ces deux intégrales sont bien égals (elles "diffèrent" par le nom de la variable muette) et valent $\pi/4$ [exercice laissé au lecteur].

Dubois

Paris, 24 oct 2013.

Exercices

- Calculer $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,2]} xy^2 \, dx\, dy$

- Calculer $\displaystyle\iint_{[0,\pi]\times[0,\pi/2]} x \sin(x+y) \, dx\, dy$

- Savoir utiliser Fubini...

  $$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y) = \int_?^? dx \int_?^? dy\, f(x,y) .$$

  Remplacer les points d'interrogation par des valeurs précises.

- Proposer un encadrement de l'intégrale

  $$\iint_{[0,2]\times[0,2]} (x+1)^y \, dx\, dy .$$