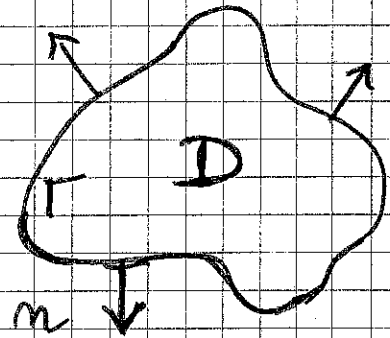


8 Intégration par parties pour les intégrales doubles

- le but de ce chapitre est d'établir dans le cas de deux dimensions d'espace la relation générale



$$(1) \iint_D \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} f n_j d\sigma$$

Fig 1.

où $\Gamma = \partial D$ est le bord du domaine D (voir la figure 1), $j \in \{1, 2\}$ le numéro de la variable, $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2$ la normale extérieure à D le long de Γ et $d\sigma$ l'élément de longueur le long de la courbe Γ .

- on rappelle d'abord la forme très générale d'une matrice R_θ de rotation d'angle θ qui permet de passer du repère (\vec{e}_1, \vec{e}_2) orthonormé direct

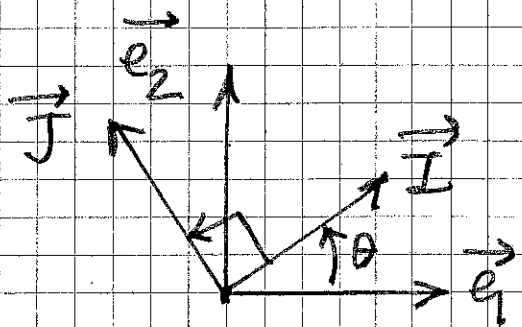


Fig 2.

au nouveau repère (\vec{I}, \vec{J}) orthonormé direct (fig 2) on a $\vec{I} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$, $\vec{J} = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$

d'où

$$(2) R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et

$$(3) I_1 = J_2, I_2 = -J_1, (\vec{I}, \vec{J}) \text{ d.r.c.t.}$$

• On s'intéresse au cas particulier du domaine D représenté à la figure 3. On a $a < b$ (deux nombres réels) et on dispose de deux fonctions régulières φ_+ et φ_-

$$[a, b] \ni x \mapsto \varphi_-(x) \in \mathbb{R},$$

$$[a, b] \ni x \mapsto \varphi_+(x) \in \mathbb{R}$$

de sorte que $\varphi_+ \geq \varphi_-$ et

$$(4) D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x) \}.$$

La frontière Γ du domaine D est composée des quatre arcs $\Gamma_g, \Gamma_-, \Gamma_d$ et Γ_+ (cf Fig 3), et on a

$$\Gamma_g = \{ (a, y), \varphi_-(a) \leq y \leq \varphi_+(a) \}$$

$$\Gamma_- = \{ (x, \varphi_-(x)), a \leq x \leq b \}$$

$$\Gamma_d = \{ (b, y), \varphi_-(b) \leq y \leq \varphi_+(b) \}$$

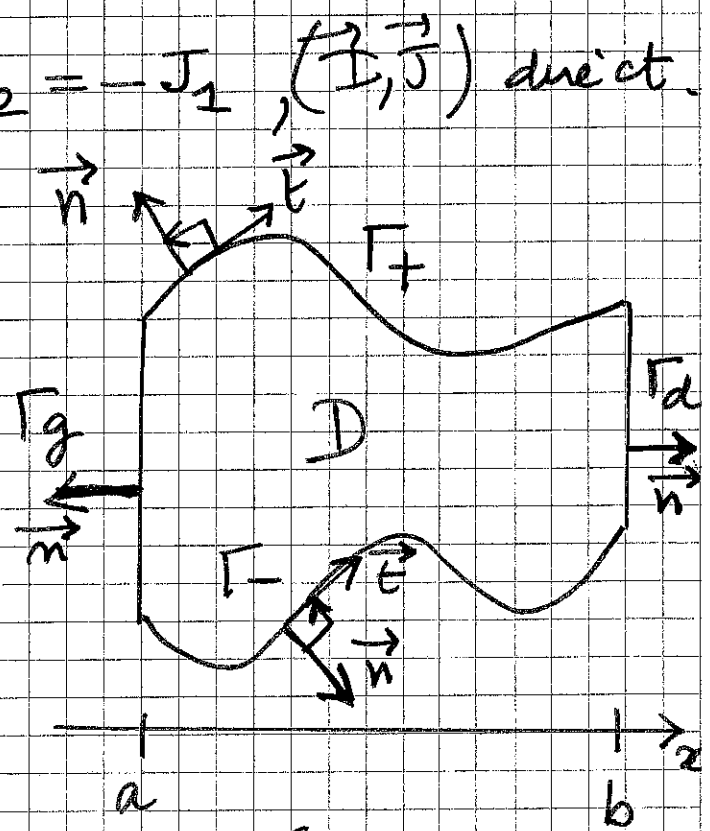


Fig 3

$$\Gamma_+ = \{(x, \varphi_+(x)), a \leq x \leq b\}.$$

* on cherche à établir (1) pour $n=2$, i.e. si f est assez régulière $D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(5) \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma} f n_y dx.$$

on obtient que la normale extérieure n_y à Γ est nulle pour Γ_g et Γ_d , positive si le long de Γ_+ et négative le long de Γ_- . Pour établir (5), on écrit d'abord le théorème de Fubini qui permet de calculer l'intégrale dans l'ordre que l'on veut:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \left[\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right]$$

or la formule d'intégration par parties pour les fonctions à une seule variable entraîne que

$$(6) \int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(x, \varphi_+(x)) - f(x, \varphi_-(x)).$$

Donc

$$(7) \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_a^b f(x, \varphi_+(x)) dx - \int_a^b f(x, \varphi_-(x)) dx.$$

* montrons que les intégrales au membre de droite de (7) sont de la forme (5). Pour la courbe

4

Γ_+ , naturellement orientée de gauche à droite par l'axe des abscisses, on a

$$\vec{T} = \frac{dx}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dy}{ds} \vec{e}_2 = \frac{dx}{ds} \vec{e}_1 + \varphi'_+(x) \frac{dx}{ds} \vec{e}_2$$

Le repère (\vec{T}, \vec{n}) est direct, donc les relations (3) montrent que $t_x = n_y = \frac{dx}{ds} > 0$, $t_y = -n_x = \frac{dy}{ds}$ on peut donc écrire

$$(8) \quad dx = n_y ds \quad \text{le long de } \Gamma_+$$

et on en déduit $\int_a^b f(x, \varphi_+(x)) dx = \int_{\Gamma_+} f n_y ds$
compte tenu de (8)

* Pour la courbe Γ_- , le repère (\vec{n}, \vec{T}) est direct cette fois (voir la figure 3) et les relations (3) montrent que dans ce cas $n_y = -t_x = -\frac{dx}{ds}$, $n_x = t_y = \frac{dy}{ds}$ et on a

$$(9) \quad dx = -n_y ds \quad \text{le long de } \Gamma_-$$

on en déduit $-\int_a^b f(x, \varphi_-(x)) dx = \int_{\Gamma_-} f n_y ds$

* compte tenu de la nullité de n_y le long des deux morceaux de frontière Γ_g et Γ_d , on peut réécrire (7) sous la forme

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma_+} f n_y dx + \int_{\Gamma_g} f n_y dx + \int_{\Gamma_-} f n_y dx + \int_{\Gamma_d} f n_y dx$$

en notant dx

l'élément de longueur (au lieu de ds)

Comme on a

5

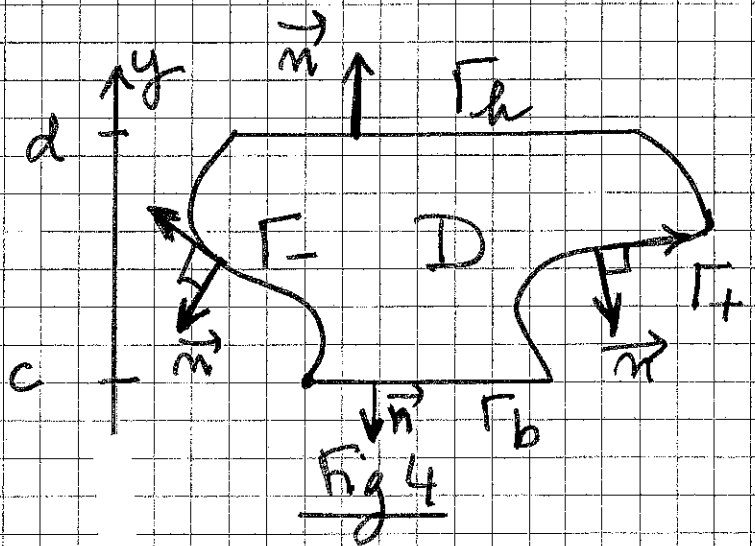
$$(10) \quad \partial D = \Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_g \cup \Gamma_- \cup \Gamma_d,$$

on déduit de la relation précédente et de (10)

$$(11) \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma} f n_y d\sigma,$$

ce qui constitue tout exactement la relation (5) que l'on cherche à démontrer!

- on étudie maintenant le cas d'un domaine D obtenu à partir des cas précédents en échangeant abscisse et ordonnée:



$$(12) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_-(y) \leq x \leq \psi_+(y)\}.$$

Les fonctions ψ_+ et ψ_- sont régulières de $[c, d]$ à valeurs réelles et on suppose $\psi_- \leq \psi_+$. alors

$$(13) \quad \partial D = \Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_b \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_h$$

avec

$$\Gamma = \{(\psi(y), y), c \leq y \leq d\}$$

$$\Gamma_b = \{(x, c), \psi_-(c) \leq x \leq \psi_+(c)\}$$

$$\Gamma_+ = \{(\psi_+(y), y), c \leq y \leq d\}$$

$$\Gamma_h = \{(x, d), \psi_-(d) \leq x \leq \psi_+(d)\}.$$

on peut établir dans ce cas la relation

$$(14) \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} f n_x d\sigma.$$

on remarque que la normale \vec{n} est colinéaire à \vec{E}_2 si on reste sur les deux segments de droite Γ_h et Γ_b . donc $n_x = 0$ dans ce cas. De plus, $n_x > 0$ le long de Γ_+ et $n_x < 0$ le long de Γ_- . le repère (\vec{n}, \vec{E}_2) est direct le long de Γ_+ et la relation (9) est alors satisfaite. D'où $dy = n_x ds$

$$(15) \quad \int_{\Gamma_+} f n_x d\sigma = \int_c^d f(\psi_+(y), y) dy.$$

De façon analogue, le "trièdre" (\vec{E}_2, \vec{n}) est direct le long de Γ_- (voir la figure 4), la relation (8) est vérifiée et on a aussi $dy = -n_x ds$, d'où

$$(16) \quad \int_{\Gamma_-} f n_x d\sigma = - \int_c^d f(\psi_-(y), y) dy.$$

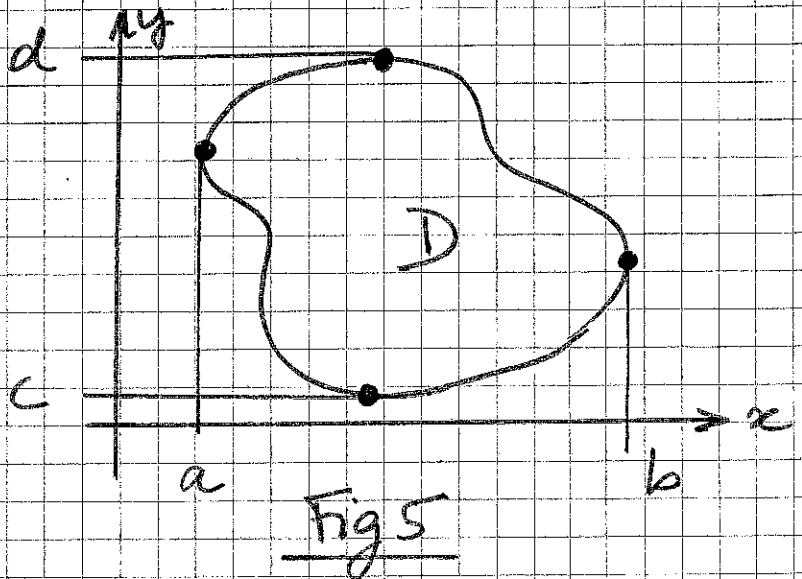
• on calcule le membre de gauche de (14)

avec le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\psi_-(y)}^{\psi_+(y)} dx \frac{\partial f}{\partial x} \\
 &= \int_c^d dy \left[f(\psi_+(y), y) - f(\psi_-(y), y) \right] \\
 &= \int_{\Gamma_+} f_{nx} dx + \int_{\Gamma_-} f_{nx} dx \quad (\text{cf (15) et (16)}) \\
 &= \int_{\Gamma} f_{nx} dx \quad \text{car } n_x = 0 \text{ sur } \Gamma_a \text{ et } \Gamma_b.
 \end{aligned}$$

La relation (14) est établie.

- Dans le cas général, les représentations (4) et (12) ont lieu simultanément (voir la figure 5), les morceaux "droits" de



frontière Γ_a , Γ_b , Γ_c et Γ_d sont réduits à un point (représenté sur la figure 5) et le reste des raisonnements est inchangé. La relation (1) est établie.

- La relation (1) peut servir à calculer des surfaces ; il suffit de choisir f telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ ou $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ ou une combinaison de telles fonctions. On en déduit

$$(17) \quad \iint_D dx dy = \int_{\partial D} x n_x d\sigma = \int_{\partial D} x dy$$

$$(18) \quad \iint_D dx dy = \int_{\partial D} y n_y d\sigma = - \int_{\partial D} y dx.$$

- Si la frontière $\Gamma = \partial D$ est représentée en coordonnées polaires (r, θ) par une courbe de la forme $r = \rho(\theta)$, l'aire limitée par Γ est déterminée par la relation

$$(19) \quad |D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (\rho(\theta))^2 d\theta.$$

En effet, en prenant la demi-somme de (17) et (18), on a

$$(19) \quad |D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x dy - y dx).$$

or $r^2 d\theta = \frac{y}{x}$ entraîne

$$(20) \quad r^2 d\theta = x dy - y dx$$

et la relation (19) résulte de (20) et du calcul précédent.

Jubari's

8 novembre 2013.

• Exercices

* Si $\vec{\varphi}(x,y)$ est un champ de vecteurs sur D ,
montrer que

$$(21) \int_D \operatorname{div} \vec{\varphi} \, dx \, dy = \int_{\partial D} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, dx$$

où \vec{n} est la normale extérieure à D .

* Soit $u(x,y)$ un champ scalaire régulier sur D . On rappelle que $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j$, où $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2$ est une normale à D . Montrer

qu'on a

$$(22) \int_D \Delta u = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, dx$$

* Généraliser (22) sous la forme

$$(23) - \int_D \Delta u \, v \, dx \, dy = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dx$$

* Calculer l'aire du carré unité à l'aide des relations (17) ou (18).

* Calculer l'aire des cercles de centre O et rayon a , centre $(a,0)$ et rayon a à l'aide de la relation (19).

* Montrer que l'aire limitée par la cardioïde $r = R(1 + \cos \theta)$ est égale à $\frac{3}{2} \pi R^2$.