SM2, Analyse Vectorielle

(9) Produit mixte et produit vectoriel.

- On se donne une base orthonormée <u>directe</u> de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, notée $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées u_i, v_i, w_i :

(1) $\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \vec{e_i}$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e_i}$, $\vec{w} = \sum_{i=1}^{3} w_i \vec{e_i}$.

Le <u>produit mixte</u> $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le déterminant des coordonnées des trois vecteurs (dans cet ordre!) :

(2) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$.

Il ne dépend <u>pas</u> de la base orthonormée directe choisie

- On récupère les propriétés usuelles du déterminant : changement de signe si on échange deux colonnes. Typiquement

(3) $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

et <u>invariance cyclique</u> :

(4) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$.

En effet,

$$(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = -(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -\left(-(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}).$$

- on a la propriété classique

$$(5)\left\{\begin{array}{l}\text{la famille } \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} \text{ est liée si et seule-}\\ \text{ment si} \quad (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0.\end{array}\right.$$

En termes géométriques, on note P le polytope obtenu en prenant un point de l'espace dont toutes les coordonnées dans la base (non orthogonale) $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont entre 0 et 1 [illustré figure 1] :

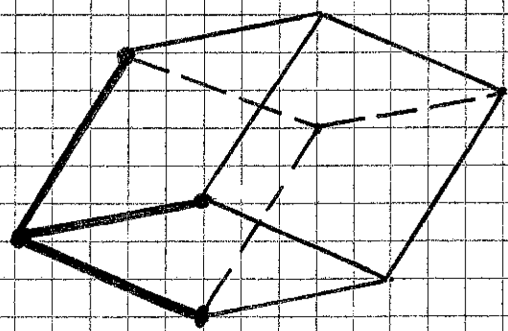

Figure 1

$$(6) \quad P = \{x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w},\ 0 \leq x,y,z \leq 1\}.$$

Alors le produit mixte est (au signe près) le volume de P :

$$(7) \qquad |P| = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|.$$

- Le produit mixte joue le rôle du déterminant jacobien dans les changements de variables pour les intégrales triples (voir plus loin dans le cours). Il généralise à trois

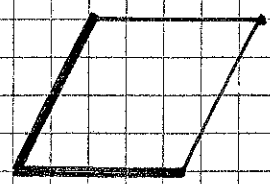

Figure 2

dimensions spatiales ce qui a été vu lors du cours (7) pour le changement de variable dans une intégrale double.

Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, décomposé dans une base orthonormée sous la forme $\vec{u} = \sum_{j=1}^{2} u_j \vec{e_j}$, $\vec{v} = \sum_{j=1}^{2} v_j \vec{e_j}$, le polytope P_2 de la figure 2, à savoir

(8) $\quad P_2 = \{ x\vec{u} + y\vec{v},\ 0 \leq x, y \leq 1 \}$

a une <u>surface</u> qui est au signe près le déterminant de la matrice jacobienne :

(9) $\quad |P_2| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right| .$

- Le <u>produit vectoriel</u> $\vec{u} \times \vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ (orienté) est l'unique vecteur $\vec{u} \times \vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

(10) $\quad \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3,\ (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}),$

où le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est noté avec un point.

on calcule les composantes $(\vec{u}\times\vec{v})_j$ du vecteur $\vec{u}\times\vec{v}$ dans la base $\vec{e_j}$ en prenant successivement $\vec{w} = \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ dans la relation (10). On a par exemple

$$(11) \quad (\vec{u}\times\vec{v})_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

puisque $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Les autres composantes se déduisent de (11) par permutation circulaire. A partir des relations (11) donnant les composantes, il est clair que la relation (10) est vraie pour tout $\vec{w}$, compte tenu de son caractère linéaire par rapport au vecteur $\vec{w}$. On peut aussi synthétiser les relations de type (11) sous la forme

$$(12) \quad \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \vec{e_1} \\ u_2 & v_2 & \vec{e_2} \\ u_3 & v_3 & \vec{e_3} \end{vmatrix}.$$

- On déduit immédiatement de (3)

$$(13) \quad \vec{v}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{v},$$

en testant $\vec{v}\times\vec{u}$ contre un vecteur $\vec{w}$:

$$(\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{w} = (\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

et $\vec{w}$ est arbitraire donc (13) a lieu.

On déduit de (13) avec $\vec{v} = \vec{u}$:

(14) $\qquad \vec{u} \times \vec{u} = 0$.

Plus généralement, on a la

Prop Le produit $\vec{u} \times \vec{v}$ est <u>nul</u> si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement <u>dépendants</u> (ie colinéaires).

<u>Preuve</u> Si $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ pour un certain scalaire λ, on a $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{u}) = \lambda \vec{u} \times \vec{u} = 0$ compte tenu de (14).

Réciproquement on peut calculer $\vec{u} \times \vec{v}$ grâce à un choix astucieux de la base $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. On choisit $\vec{e_1}$ colinéaire à $\vec{u}$, c'est à dire

(15) $\qquad \vec{u} = U\, \vec{e_1}, \quad U \in \mathbb{R}$.

Ensuite, le plan $(\vec{u}, \vec{v})$ [c'est un plan si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants, hypothèse que nous pouvons faire pour un calcul général] admet une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ qui prolonge $\vec{e_1}$. On développe $\vec{v}$ dans cette base :

(16) $\qquad \vec{v} = \alpha \vec{e_1} + V \vec{e_2}, \quad \alpha, V \in \mathbb{R}$.

Le calcul de $\vec{u} \times \vec{v}$ avec la relation (12) n'offre alors *pas* de difficulté :

$$U\vec{e_1}\times(\alpha\vec{e_1}+V\vec{e_2}) = UV\vec{e_3}.$$

et $\vec{u}\times\vec{v}=0$ si et seulement si $UV=0$.
Si $U=0$, alors $\vec{u}=0$ et les vecteurs sont liés ;
si $U\neq 0$, alors $V=0$ et (16) devient
$\vec{v}=\alpha\vec{e_1}=\frac{\alpha}{U}\vec{u}$, ce qui montre que les vecteurs sont liés. D'où le résultat. $\blacksquare$

- On a pu remarquer au passage les règles de calcul pratique :

(17) $\quad \vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}\ ;\ \vec{e_2}\times\vec{e_3}=\vec{e_1}\ ;\ \vec{e_3}\times\vec{e_1}=\vec{e_2}.$

- on a aussi

(18) $\quad \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u} \quad ; \quad \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}.$

Le vecteur $\vec{u}\times\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
En effet, $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=(\vec{u},\vec{v},\vec{u})=0$ et
$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=(\vec{u},\vec{v},\vec{v})=0$. D'où (18).

- **Prop** Si $\vec{u}\times\vec{v}\neq 0$, le trièdre $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ est direct ; son produit mixte $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v})$ est strictement positif.

<u>Preuve</u>. Si $\vec{u}\times\vec{v}\neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants ; ils engendrent

un plan. Quand on écrit la relation (10) avec $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, il vient $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 > 0$. Donc

(19) $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0 \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) > 0$

et le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ est direct. ◻

Prop Le module $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ du produit vectoriel est égal à la surface du parallélogramme P_2 défini en (8) :

(20) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = |P_2|$, P_2 défini par (8).

Preuve.

On reprend le calcul fait page 5 avec les hypothèses (15) et (16). Alors (cf la leçon numéro 7),

(21) $|P_2| = \left| \det \begin{pmatrix} U & \alpha \\ 0 & V \end{pmatrix} \right| = |UV|$.

or $\vec{u} \times \vec{v} = UV\vec{e_3}$, donc $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = |UV|$, ce qui établit la propriété. ◻

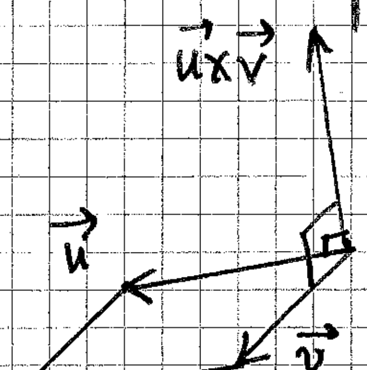

Figure 3.

Prop Double produit vectoriel.

Pour $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a

$$(22)\quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}.$$

Preuve. On sait (cf (18)) que $\vec{u}\times\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ donc au plan engendré par ces deux vecteurs. Donc $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}\times\vec{v}$, donc appartient au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$; on peut écrire

$$(23)\quad (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v},$$

avec des coefficients a et b qu'il faut déterminer. On calcule $\vec{u}\times\vec{v}$ à l'aide de (15) et (16) : $\vec{u}\times\vec{v} = UV\vec{e_3}$. Si $\vec{w} = \sum_{j=1}^{3} w_j \vec{e_j}$, on a :

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = UV\vec{e_3}\times(w_1\vec{e_1} + w_2\vec{e_2} + w_3\vec{e_3})$$

$$= UV(w_1\vec{e_2} - w_2\vec{e_1}).$$

On exprime $V\vec{e_2}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$V\vec{e_2} = \vec{v} - \alpha\vec{e_1} = \vec{v} - \alpha\frac{1}{U}\vec{u}. \quad \text{D'où}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = Uw_1\left[\vec{v} - \frac{\alpha}{U}\vec{u}\right] - Vw_2\vec{u}$$

$$= -(\alpha w_1 + Vw_2)\vec{u} + Uw_1\vec{v}.$$

On remarque que

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \alpha w_1 + V w_2 \,, \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = U w_1 \,,$$

donc la relation (22) résulte du calcul précédent $\square$

<u>Remarque</u> Le produit vectoriel n'est pas associatif !

En général, $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

On a par exemple, avec $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{v} = \vec{e}_2$ et $\vec{w} = \vec{e}_1$:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \left((\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 \right) \times \vec{e}_1 = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_1$$

$$= \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \qquad \text{et}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \times (-\vec{e}_3)$$

$$= \vec{e}_2 - \vec{e}_1$$

et les deux vecteurs sont différents pour cet exemple tout à fait élémentaire.

Dubois

14 novembre 2013.