STN-2, Analyse Vectorielle 1

(10) Coordonnées sphériques

- Exemples de surfaces

Le plan, le cylindre, la sphère, le cône, le tore ... sont autant d'exemples de surfaces utilisées usuellement en génie nucléaire. Une surface est un espace mathématique "à deux dimensions"; il faut deux paramètres réels u et v pour s'y repérer

- Coordonnées cylindriques.

un point M sur le cylindre qui a pour base le cercle de centre O et de rayon R dans le plan (xOy) et dirigé par des droites génératrices parallèles à la troisième direction Oz

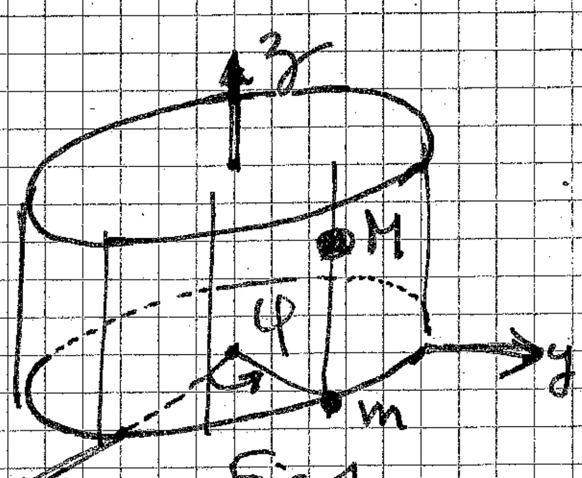

Fig 1

peut être repéré par deux nombres: la cote z du point M et l'angle semi-polaire du point m (projeté de M dans le plan Oxy parallèlement à Oz). on peut écrire:

(1) $\vec{OM} = R \; \vec{e_\rho}(\varphi) + z \; \vec{e_z}$,

où

(2) $\vec{e}_\rho(\varphi) = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2$.

* Si on projette la relation (1) sur les trois axes cartésiens $\vec{e}_j$ $(1 \leq j \leq 3)$, on a :

$$(3) \quad \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Les coordonnées semi-polaires (R, φ, z) permettent de repérer le point M sur le cylindre de rayon R décrit Figure 1.

• <u>Introduction aux coordonnées sphériques.</u>

On se donne un point M de l'espace $\mathbb{R}^3$, qui peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes :

(4) $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$.

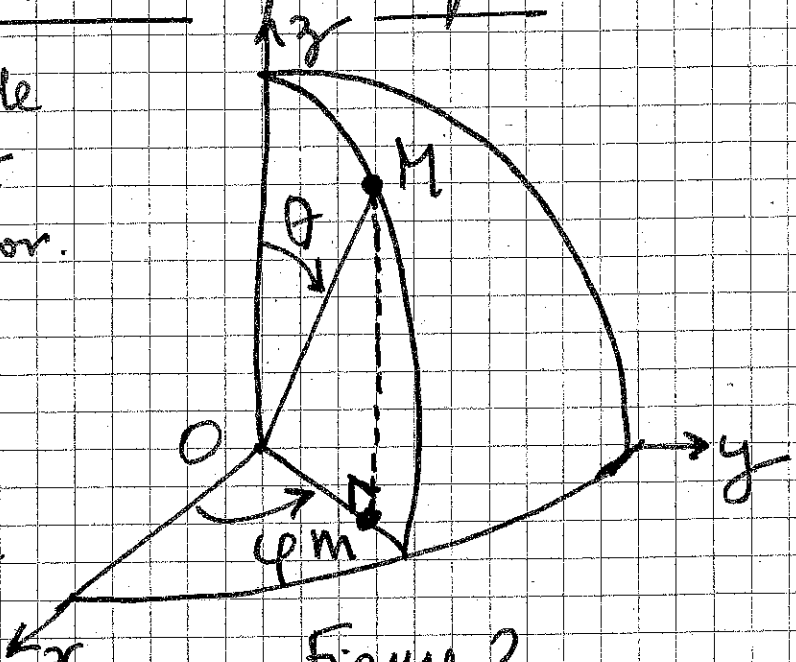

Figure 2.

On introduit le rayon r de la sphère de centre l'origine et de rayon OM :

(5) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r \geqslant 0$.

On projette ensuite M en le point m sur le plan xOy (voir la Fig. 2). Si M n'est pas sur l'axe Oz, c'est à dire si m n'est pas confondu avec l'origine, on peut définir sans ambiguïté l'angle polaire φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$ pour fixer les idées) du point m dans le plan xOy on retrouve les coordonnées polaires classiques du plan :

$$(6) \quad x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad R^2 = x^2+y^2.$$

* Dans le plan défini par les trois points O, m et M (cf Fig. 2), l'angle θ désigne l'angle qui permet de passer de la demi-droite Oz à la demi-droite OM. On a donc :

$$(7) \quad z = r\cos\theta, \quad R = r\sin\theta.$$

Les relations (6) et (7) définissent le passage entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires (r, θ, φ) :

$$(8) \quad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

avec

$$(9) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

• Si on fixe r (la sphère) et θ (l'angle azimutal), alors le point M décrit à la relation (8) parcourt une courbe circulaire, un <u>parallèle</u>, de rayon $r\sin\theta$. Pour $\theta = \pi/2$, ce parallèle se nomme également "equateur" (voir la figure 3). Si on fixe r et φ (l'angle longitudinal), alors le point M décrit un cercle de rayon r, un <u>méridien</u>.

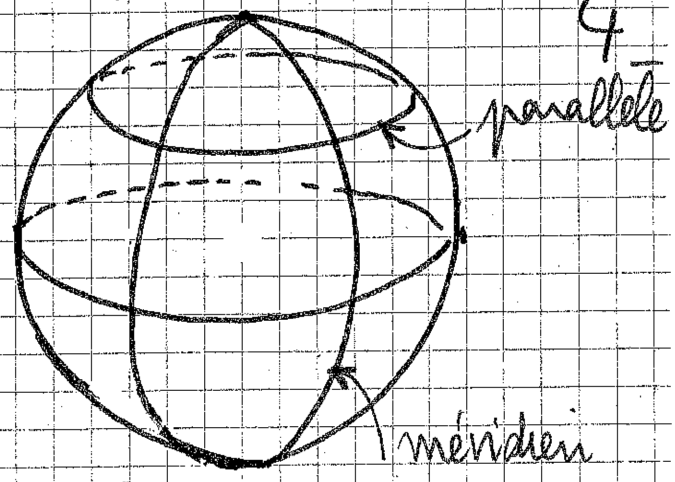

Fig 3.

• Les vecteurs tangents aux parallèles et aux méridiens permettent de construire une base locale orthonormée $(\vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_r})$. On pose d'abord

$$(10) \quad \vec{e_r} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\vec{OM}$$

au vu de la relation (8). On calcule ensuite $\partial \vec{M}/\partial\theta$, et on introduit un vecteur unitaire $\vec{e_\theta}$:

$$(11) \quad \vec{e_\theta} = \cos\theta\,(\cos\varphi\,\vec{e_1} + \sin\varphi\,\vec{e_2}) - \sin\theta\,\vec{e_3}.$$

On a alors

$$(12) \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial\theta} = r\,\vec{e_\theta}.$$

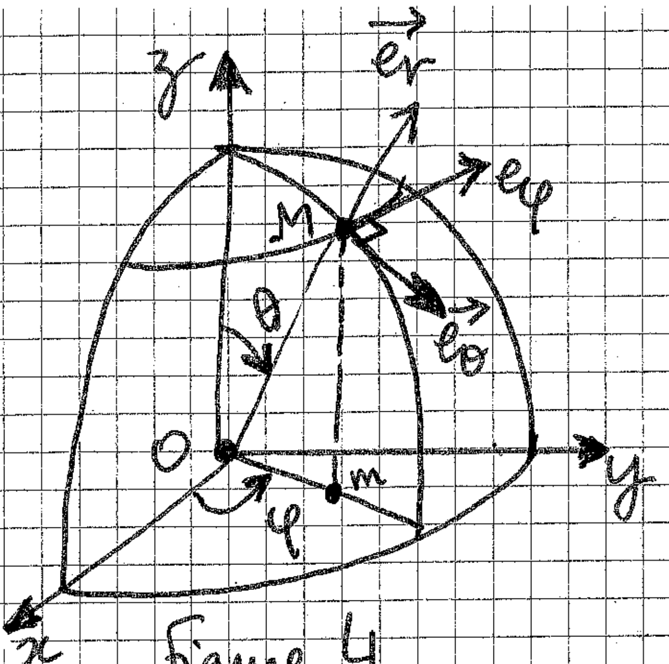

Figure 4.

Enfin, il vient

(13) $\dfrac{\partial \vec{m}}{\partial \varphi} = r\sin\theta \, \vec{e_\varphi}$

(14) $\vec{e_\varphi} = -\sin\theta\,\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{e_2}$.

On a la

(Prop) (1) <u>orthogonalité</u>
Les vecteurs $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\varphi}$ sont orthogonaux

La preuve est un <u>exercice</u> laissé au lecteur

(Prop) (2) <u>Produit vectoriel</u>
on a la relation

(15) $\vec{e_\theta} \times \vec{e_\varphi} = \vec{e_r}$

Encore un <u>exercice</u> pour le lecteur !

- On déduit des propositions (1) et (2) que le trièdre $(\vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_r})$ forme une base orthonormée directe de l'espace $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs introduits sont clairement unitaires ; de plus la relation (15) montre que $\vec{e_r}$ est orthogonal à

$\vec{e}_\theta$ et à $\vec{e}_\varphi$.

- Quelle est la surface de la sphère ?

Un point M de la sphère de rayon r est paramétré par les angles θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ et φ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$. Quelle est alors la surface $|S|$ de la sphère de rayon r ? On a un changement de variable, une paramétrisation $[0, \pi] \times [0, 2\pi[\ni (\theta, \varphi) \mapsto M \in \mathbb{R}^3$, dont les coordonnées sont données par les relations (8). Dans le cas d'un point de $\mathbb{R}^2$, l'élément d'aire $d\sigma$ est fourni par $|\det J| \, d\theta d\varphi$, où $|\det J|$ est l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{\partial M}/\partial\theta$ et $\vec{\partial M}/\partial\varphi$. Il en est de même ici, même si le point M appartient à l'espace $\mathbb{R}^3$. L'aire du parallélogramme de côtés $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$ est fournie par le module du produit vectoriel $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$:

$$(16) \qquad d\sigma = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \right\| d\theta \, d\varphi$$

* Pour les coordonnées sphériques (8), $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$ est donné par la relation (12) et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$ par la relation (13) ; on a donc

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = r \vec{e}_\theta \times (r \sin\theta \, \vec{e}_\varphi) = r^2 \sin\theta \, \vec{e}_r$$

compte tenu de (15). On remarque que $\sin\theta \geq 0$

si $0 \leq \theta \leq \pi$. Donc $\left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}\right\| = r^2 \sin\theta$ et

(17) $\quad d\sigma = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$.

* Le calcul de l'aire de la sphère est alors un simple calcul d'intégrale double :

$$|S| = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; r^2 \sin\theta = 2\pi r^2 \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right)$$
$$= 2\pi r^2 \left(-\cos\theta\right)_0^{\pi}$$

(18) $\quad |S| = 4\pi r^2$.

• On retiendra que pour calculer une surface, on doit calculer l'aire d'un parallélogramme lié aux deux vecteurs tangents $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ à la surface ; cette aire élémentaire se calcule à l'aide du module de leur produit vectoriel :

(19) $\quad d\sigma = \left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right\| du\, dv$.

Dubois

25 novembre 2013