Analyse Vectorielle (STN-2)

(1I) Intégrales de surface.

• Paramétrage d'une surface.

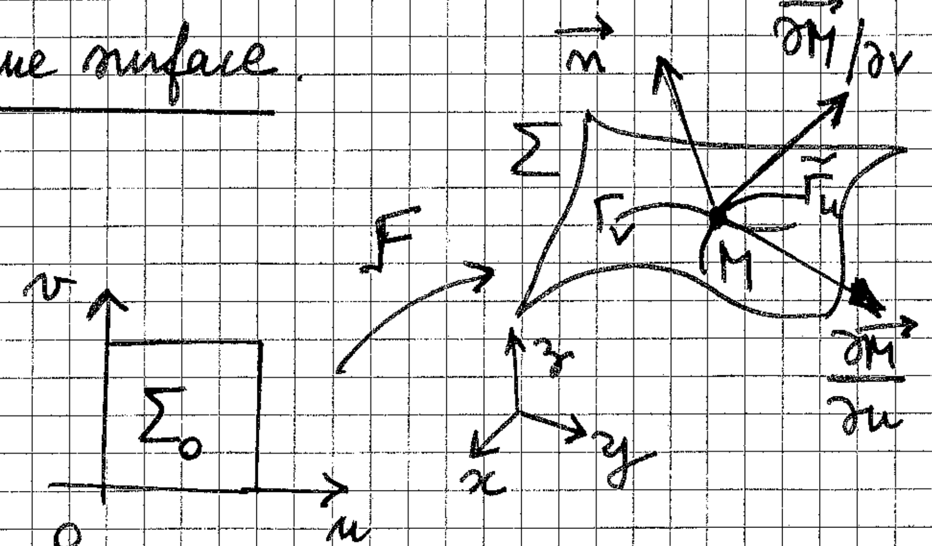


Fig. 1

Une surface Σ est paramétrée de façon usuel le en transformant un morceau de plan $(u,v)\in\Sigma_0$ par un ensemble de fonctions $X(u,v)$, $Y(u,v)$, $Z(u,v)$ qui donnent les coordonnées de $M(u,v)$ sur la surface [Figure 1] :

(1) $\Sigma_0 \ni (u,v) \mapsto M(u,v) = (X(u,v),\ Y(u,v),\ Z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$.

Ce paramétrage permet naturellement de définir deux familles de courbes Γ_v et $\tilde{\Gamma}_u$ tracées sur la surface; il suffit de fixer v [respectivement u] dans les deux paramètres (u,v) de la relation (1) :

$\Gamma_v : \mathbb{R} \ni u \mapsto M(u,v) \in \mathbb{R}^3 \qquad \tilde{\Gamma}_u : \mathbb{R} \ni v \mapsto M(u,v) \in \mathbb{R}^3$.

* Le vecteur tangent à Γ_v est la dérivée par rapport à u de M, c'est à dire le vecteur $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}$

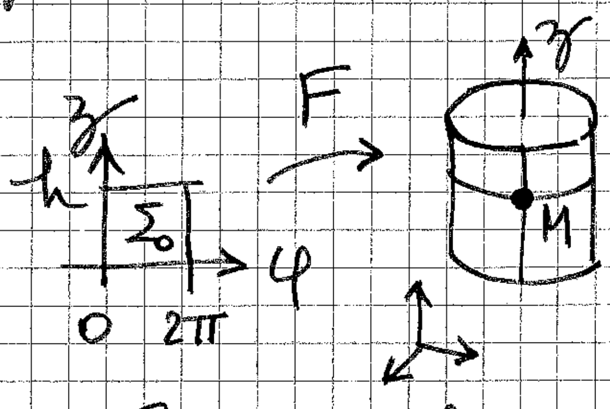
De même, le vecteur tangent à $\tilde{\Gamma}_u$ est la dérivée partielle de $M(u,v)$ par rapport à v, c'est à dire le vecteur $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$. Ils sont illustrés figure 1.

Le <u>plan tangent</u> à la surface Σ au point M est engendré par le couple de vecteurs $\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right)$. On fait l'hypothèse suivante

$$(2) \qquad \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \neq 0, \quad \forall (u,v) \in \Sigma_0 .$$

Les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ sont non nuls (les courbes Γ_v et $\tilde{\Gamma}_u$ sont correctement paramétrées) et de plus, ces deux vecteurs sont <u>linéairement indépendants</u>.

- Pour un cylindre de rayon R et hauteur h, la courbe Γ_z est un <u>cercle</u> de rayon R et de cote z (Fig. 2) et la courbe $\tilde{\Gamma}_\varphi$ une <u>droite verticale</u> parallèle à l'axe Oz. Le plan des paramètres



<u>Fig. 2</u>. Cylindre

est composé de l'angle polaire φ et de la cote z : $(\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times [0, h]$. On a simplement

$$(3) \quad x = R\cos\varphi, \; y = R\sin\varphi, \; z = z$$

donc $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = -R\sin\varphi\,\vec{e_1} + R\cos\varphi\,\vec{e_2}$, $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial z} = \vec{e_3}$ et

(4) $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \times \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial z} = R(\cos\varphi\,\vec{e_1} + \sin\varphi\,\vec{e_2})$; cylindre.

- Pour une sphère de rayon R, le plan des paramètres est composé de l'angle polaire θ et de l'angle longitudinal φ :

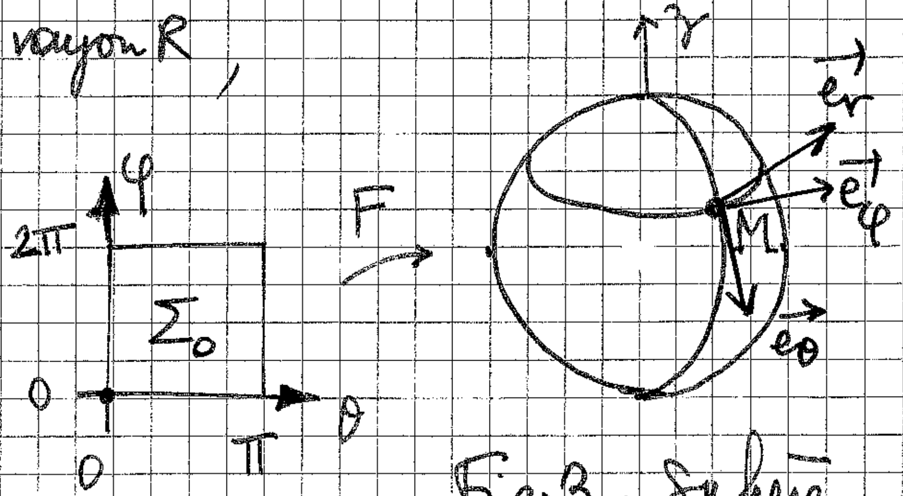


Fig. 3. Sphère.

$(\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$. On a

(5) $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$.

La courbe $\tilde{\Gamma}_\theta$ est un parallèle et la courbe Γ_φ un méridien (grand cercle passant par les deux pôles). On a vu à la leçon précédente que

(6) $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = R\vec{e_\theta}$, $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = R\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$,

avec $\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{e_1} + \cos\varphi\,\vec{e_2}$. On a $\vec{e_r} = \vec{e_\theta} \times \vec{e_\varphi}$ (voir la figure 3) et

(7) $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = R^2 \sin\theta\,\vec{e_r}$.

- Le <u>vecteur normal</u> est le vecteur unitaire dirigé par le produit vectoriel $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial v}$:

(8) $$\vec{n} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\|} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$$

- Pour calculer l'aire $|\Sigma|$ du morceau de surface issu du paramétrage (1), on commence par traiter le cas où Σ est <u>plane</u>. Alors $Z(u,v) \equiv 0$ dans la relation (1), et on a le calcul suivant :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \partial_u X \\ \partial_u Y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial_v X \\ \partial_v Y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, la matrice jacobienne du changement de coordonnées $\Sigma_0 \ni (u,v) \mapsto (x = X(u,v),\ y = Y(u,v)) \in \Sigma$ vaut

$$J = \begin{pmatrix} \partial_u X & \partial_v X \\ \partial_u Y & \partial_v Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det J = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}.$$

Prop ① <u>Cas d'une surface plane.</u>

Si la surface Σ définie par (1) est plane (ie $Z(u,v)=0$), la transformation (1) est aussi un changement de variables dans le plan ; on a

(9) $$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right)\vec{e}_3 = (\det J)\, e_3.$$

- Dans le cas bidimensionnel, on a $|\Sigma| = \iint_{\Sigma_0} |\det J|\, du\, dv$, relation qui s'étend au cas tridimensionnel ou

(10) $$|\Sigma| = \iint_{\Sigma_0} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

En d'autres termes, l'élément d'aire $d\sigma$ pour la surface Σ se calcule par

(11) $$d\sigma = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| du\, dv .$$

* En particulier, pour le cylindre (relations (3)), on a

(12) $$d\sigma = R\, d\varphi\, dz \quad \text{(cylindre)}$$

et pour la sphère (relations (5)(6)(7)) :

(13) $$d\sigma = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad \text{(sphère)}.$$

- Pour intégrer une fonction f définie sur le morceau Σ de surface, c'est à dire

(14) $$\mathbb{R}^3 \supset \Sigma \ni M \mapsto f(M) \in \mathbb{R},$$

on compose avec le paramétrage (1), ce qui définit $\hat{f}(u,v)$ par :

(15) $$\Sigma_0 \ni (u,v) \longmapsto \hat{f}(u,v) = f(M(u,v)) \in \mathbb{R} .$$

Dans le cas plan (où (1) est un simple changement de variables), on a vu (leçon 7) que

(16) $$\iint_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \iint_{\Sigma_0} \hat{f}(u,v)\, |\det J|\, du\, dv.$$

Pour une surface quelconque, on peut démontrer que le cas particulier où $|\det J| = \left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right\|$ (voir (9)) s'étend au cas général :

$$(17) \quad \iint_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \iint_{\Sigma_0} \hat{f}(M) \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| du\, dv.$$

<u>L'intégrale de surface</u> (17) s'évalue avec une intégrale double (membre de droite de (17)). La relation précédente redonne (10) si $f(M) = 1$ [cas particulier d'un calcul d'aires].

- Dans le cas d'un cylindre (relations (3)), la relation (17) devient, compte tenu de (4) :

$$(18) \quad \iint_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} R\, d\varphi\ \hat{f}(\varphi, z) \quad [\text{cylindre}]$$

prenant garde que $d\sigma$ est donné par la relation (12). Dans le cas de la sphère (relations (5) à (7)), compte tenu de (13), on a

$$(19) \quad \iint_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, (R^2 \sin\theta)\, \hat{f}(\theta, \varphi) \quad [\text{sphère}].$$

- Il est utile d'introduire les opérateurs gradient (ou ∇) pour un champ scalaire $\mathbb{R}^3 \ni M \mapsto U(M) \in \mathbb{R}^3$, divergence, rotationnel pour un champ de vecteurs $\mathbb{R}^3 \ni M \mapsto \vec{\varphi}(M) \in \mathbb{R}^3$:

(20) $\nabla U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{e_1} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{e_2} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{e_3} \in \mathbb{R}^3$

(21) $\mathrm{div}\,\vec{\varphi} = \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi_z}{\partial z} \in \mathbb{R}$

si $\varphi(M) = \varphi_x(M)\vec{e_1} + \varphi_y(M)\vec{e_2} + \varphi_z(M)\vec{e_3}$.

Le rotationnel $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi}$ est un champ de vecteurs qui se calcule symboliquement en développant le déterminant suivant :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \varphi_x & \vec{e_1} \\ \partial/\partial y & \varphi_y & \vec{e_2} \\ \partial/\partial z & \varphi_z & \vec{e_3} \end{vmatrix},$$

relation qui s'écrit sous forme plus rigoureuse

(22) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} = (\partial_y \varphi_z - \partial_z \varphi_y)\vec{e_1} + (\partial_z \varphi_x - \partial_x \varphi_z)\vec{e_2} + (\partial_x \varphi_y - \partial_y \varphi_x)\vec{e_3}$.

- Théorème de Stokes.

Nous définissons d'abord le champ flux Φ d'un champ de vecteurs $\vec{\varphi}$ à travers une surface Σ qui s'appuie sur une courbe Γ.

Le paramétrage (u,v) court maintenant sur un morceau Σ_0 de surface (Fig 4) qui

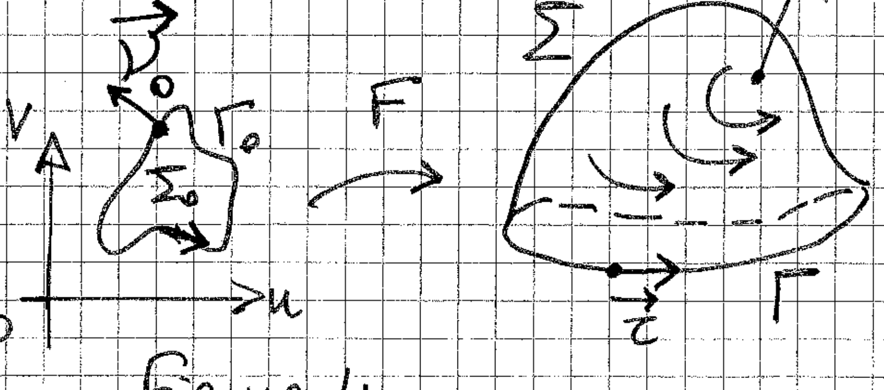


Figure 4

était un simple rectangle dans ces exemples précédents. Si (u,v) appartient à la frontière Γ_0 du morceau de plan Σ_0 (Fig. 4), alors le point $M(u,v)$ décrit par (1) suit le bord Γ de la frontière du morceau de surface Σ (voir la figure 4). Cette courbe Γ est naturellement orientée par la donnée d'une normale $\vec{n}$ à la surface Σ (voir la figure 4) ; le vecteur tangent à Γ, noté $\vec{\tau}$ (de norme 1) a une orientation induite par la normale $\vec{n}$.

- Le <u>flux</u> Φ du champ $\vec{\varphi}(M) \in \mathbb{R}^3$ est défini par :

$$(23) \qquad \phi = \iint_{\Sigma} \vec{\varphi}(M) \cdot \vec{n}(M) \, d\sigma .$$

C'est un scalaire ($\phi \in \mathbb{R}$) qui dépend du produit scalaire $\vec{\varphi}(M) \cdot \vec{n}(M)$ qu'il faut intégrer sur toute la surface Σ.

Pr (2) <u>de Stokes</u> (<u>intégration par-parties sur Σ</u>)

Si $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs régulier, on définit son rotationnel $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi}$ à l'aide de (22). On a alors le résultat suivant :

$$(24) \qquad \iint_{\Sigma} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Gamma} \vec{\varphi} \cdot \vec{\tau} \, ds \; ;$$

le flux du rotationnel de $\vec{f}$ sur la surface Σ est égale à la circulation du champ $\vec{f}$ le long du bord Γ de la surface Σ. Dans le membre de droite de la relation (24), ds est l'abscisse curviligne le long de Γ et $\vec{\tau}$ (unitaire) le vecteur tangent le long de Γ.

- La preuve de ce résultat dépasse le cadre de ce cours. L'essentiel est de savoir que l'on se ramène à des relations d'intégration par parties du type

$$(25)\quad \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial f}{\partial u}\,du\,dv = \int_{\Gamma_0} f\,\nu_u^0\,ds_0 \;;\; \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial f}{\partial v}\,du\,dv = \int_{\Gamma_0} f\,\nu_v^0\,ds_0$$

où Γ_0 est la frontière de Σ_0 (Partie gauche de la figure 4) et $\vec{\nu}_0 = (\nu_u^0, \nu_v^0)$ la normale (unitaire) extérieure à la courbe Γ_0.

Paris, 27 novembre 2013.

Dubois.

Exercices

- Soit Σ la demi-sphère de centre O, rayon R, qui satisfait à $\{z \geq 0\}$. Calculer l'intégrale de surface $I = \int_{\Sigma} z \, d\sigma$.
- Soit $\tilde{\Sigma}$ la demi-sphère de centre O, rayon R, satisfaisant à $\{x \geq 0\}$. En utilisant les coordonnées polaires (5) préciser pour quelles valeurs du paramètre le point $M(\theta, \varphi)$ appartient à $\tilde{\Sigma}$. En déduire la valeur de l'intégrale de surface $J = \int_{\tilde{\Sigma}} x \, d\sigma$
- Soit $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ et un vecteur fixe, $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{\varphi}(\vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r}$. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi}$ en fonction du vecteur $\vec{\alpha}$.
- Soit Σ la demi-sphère de centre O, rayon R, satisfaisant à $\{z \geq 0\}$. Montrer qu'elle s'appuie sur Γ, cercle de centre O et rayon R du plan xOy. On pose $\vec{\varphi}(\vec{r}) = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2$. Calculer d'une part le flux $\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ et d'autre part la circulation $\int_{\Gamma} \vec{\varphi} \cdot \vec{\tau} \, ds$. Constater que ces deux nombres sont égaux [c'est ce qu'exprime le théorème de Stokes (24) en toute généralité].