Cours d'Analyse Vectorielle

Saint Denis, automne 2014

Cours 01

Rappels sur l'intégrale simple

François Dubois

① Rappels sur l'intégrale simple.

• Introduction

On se donne deux réels a et b, avec la condition

(1) $a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

On se donne une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée sur l'intervalle borné, on peut dans un premier temps la supposer positive :

(2) $f \geq 0 \iff \forall x \in [a,b], \ f(x) \geq 0$

Alors le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ peut être défini : c'est l'aire de la surface comprise entre la courbe et l'axe des x d'une part, entre les deux abscisses a et b d'autre part (Fig 1).

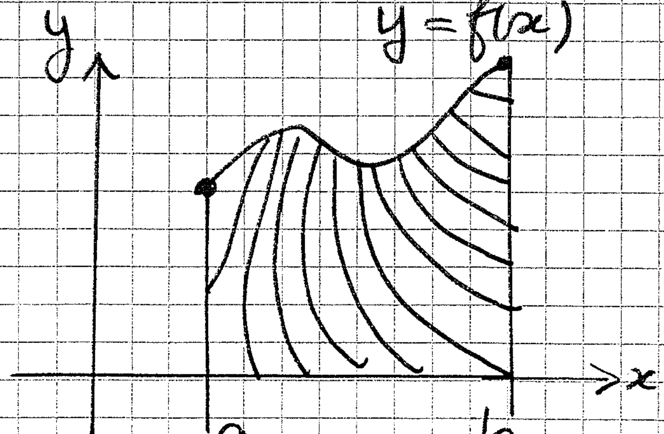

Fig 1.

Si $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$,
alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aire de } \Omega, \quad (f \geqslant 0).$$

Cette approche heuristique est bien suffisante pour se faire une intuition de ce qu'est une intégrale. Ce n'est pas une définition mathématiquement rigoureuse, laquelle dépasse le cadre applicatif que nous considérons ici.

- Intégrale de la fonction $f(x) \equiv 1$.

Grâce à la remarque précédente, il est clair que si $f(x)$ vaut toujours 1, l'aire sous la courbe vaut 1, multiplié par la longueur de l'intervalle $[a,b]$, c'est à dire $(b-a)$:

(3) $$\int_a^b dx = b-a.$$

- Positivité de l'intégrale.

L'intégrale d'une fonction positive (au sens de (2)) est toujours un nombre positif :

(4) $$(f \geqslant 0) \Rightarrow \left(\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0\right) \qquad (a<b).$$

Attention à l'hypothèse (1) : la propriété de positivité (4) est en défaut si on ne suppose plus $a<b$!

- <u>Linéarité de l'intégrale</u>

On se donne deux fonctions f et g définies $[a,b] \to \mathbb{R}$ on a un calcul très simple de l'intégrale de la fonction $(f+g)$:

(5) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Si par ailleurs λ est un nombre réel, l'intégrale de la fonction (λf) s'obtient en multipliant par λ l'intégrale de f :

(6) $\int_a^b (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

- <u>Additivité par rapport au domaine</u>.

On intercale un nombre c entre a et b :

(7) $a < c < b$,

On a alors

(8) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

La surface entre a et b est somme de la surface entre a et c et de celle entre c et b (si $f \geq 0$). La relation (8) est également connue sous le nom de "relation de Chasles".

☐ Nous pouvons calculer l'intégrale d'une fonction étagée, ou constante par intervalle. On intercale $(N-1)$ points entre a et b :

(9) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_N = b$.

On suppose la fonction f constante dans chaque intervalle $]x_j, x_{j+1}[$ pour $j = 0, 1, \ldots, N-1$:

(10) $f(x) = \varphi_{j+1/2}$, $\forall x \in]x_j, x_{j+1}[$, $0 \leq j \leq N-1$.

Alors

(11) $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{j+1/2}\,(x_{j+1} - x_j).$$

La preuve utilise les propriétés listées plus haut :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx \qquad (\text{cf } (8))$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_{j+1/2}\,dx \qquad (\text{cf } (10))$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{j+1/2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} dx \qquad (\text{cf } (6))$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{j+1/2} (x_{j+1} - x_j) \qquad (\text{cf } (3))$$

et la relation (11) est établie. $\square$

- La relation (11) est aussi connue sous le nom de méthode des rectangles. Si la relation (10) n'est plus exacte, mais approchée, c'est à dire $f(x) \simeq \varphi_{j+1/2}$ pour $x \in]x_j, x_{j+1}[$, alors le calcul précédent reste valable et permet un calcul <u>approché</u> de l'intégrale de f : $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_j \varphi_{j+1/2} (x_{j+1} - x_j)$.
- Dans le cas où f est affine, alors l'aire sous la courbe est un trapèze ; l'aire d'un trapèze est donnée par hauteur * [petite base plus grande base] divisé par deux :

(12) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a)$; f affine.

La relation (12) conduit à la méthode de calcul approché des trapèzes, qui consiste à utiliser (12) pour les petits intervalles $]x_j, x_{j+1}[$ (cf (9)), où l'on peut considérer f comme "bien approchée" par une fonction affine.

- Théorème fondamental de l'analyse

On se donne $a<b$ deux nombres réels et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Alors la fonction $\phi(x)$ définie sur $[a,b]$ par

(13) $\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad a\leq x\leq b$

est une fonction dérivable sur $[a,b]$. On a

(14) $\phi'(x)=f(x)$

- La dérivabilité (14) nous donne la vitesse de variation de la surface de la figure 1 si on fait varier la borne supérieure. On se donne Δx assez petit. Alors

(15) $\phi(x+\Delta x)-\phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \simeq \Delta x\, f(x)$.

Si Δx tend vers 0, le quotient $\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}$ tend vers $f(x)$; c'est ce qu'exprime la relation (14). Toute la difficulté (technique ! on utilise explicitement le fait que f est une fonction continue) est d'exprimer ce qui se cache sous le symbole "$\simeq$" dans la relation (15). Nous ne détaillons pas cette difficulté dans le cadre de ce cours.

Nous avons par ailleurs le résultat "évident" [alors qu'il ne l'est pas !] suivant :

Th d'intégration des constantes.

Soit $a<b$ deux réels, g dérivable $]a,b[\to\mathbb{R}$ telle que

(16) $\forall t\in]a,b[,\ g'(t)=0$.

Alors g est constante :

(17) $\exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in]a,b[,\ g(t)=c$.

Prop Calcul d'une intégrale par la méthode des primitives.

Soit $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, $F'=f$ une primitive de f. Alors on a

(18) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

On pose $\left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$.

Preuve

Pour $a \leq x \leq b$, on pose $\phi(x) \equiv \int_a^x f(t)dt - F(x)$ alors ϕ et dérivable ; compte tenu de (13), on a

$$\phi'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Donc ϕ est constante ; en particulier $\phi(a) = \phi(b)$

or
$$\phi(a) = 0 - F(a)$$
$$\phi(b) = \int_a^b f(t)dt - F(b).$$

Le résultat (18) découle de l'égalité $\phi(b) = \phi(a)$.

$\square$

- La relation (18) est un cas particulier de la relation

$$(19) \quad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f n_j \, d\sigma.$$

on a ici $\Omega =]a,b[$; son bord $\partial\Omega$ est composé des deux points a et b ;

$$(20) \quad \partial(]a,b[) = \{a, b\}.$$

La normale extérieure en a vaut $n(a) = -1$ et en b $n(b) = +1$.

La relation (18) s'écrit aussi

$$(21) \quad \int_a^b \left[\frac{d}{dx} F(x) \right] dx = F(a)n(a) + F(b)n(b)$$

qui peut être vue comme une "intégrale" sur un bord qui est composé de deux points. Nous n'entrerons pas plus avant ici dans le développement de cette construction théorique

• <u>Formule d' intégration par parties.</u>

On pose simplement $F(x) = u(x)\,v(x)$ dans la relation (21). De la règle de Leibniz de dérivation d'un produit

$$(22) \quad \frac{d}{dx}\big(u(x)v(x)\big) = \frac{du}{dx} v(x) + u(x) \frac{dv}{dx},$$

on déduit de (21) :

$$\int_a^b \left[u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \right] dx = \Big[u(x)\,v(x) \Big]_a^b$$

D'où par linéarité et en passant l'une des intégrales dans le membre de droite :

$$(23) \quad \int_a^b u'(x) v(x)\, dx = -\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx + \Big[u(x) v(x) \Big]_a^b .$$

La formule d' intégration "par parties" (23) résulte directement du calcul de l'intégrale d'une dérivée (relation (21)) et de la règle de Leibniz (22).

- <u>changement de variable</u>

on se donne $\alpha < \beta$ de sorte de paramétrer l'intervalle $]a,b[$ à l'aide d'une fonction $\varphi(t)$ qu'on suppose bijective et strictement <u>croissante</u> :

(24) $\quad x = \varphi(t) \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

on a $a < b$, donc la représentation "croissante" (24) impose

(25) $\quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$.

on a la formule du changement de variable

(26) $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

on <u>change les bornes</u> en tenant compte de (25), et on dérive (24) $dx = \varphi'(t)dt$.

Afin de prouver (26), on introduit une primitive F de la fonction f et on pose

(27) $\quad \phi(t) \equiv F(\varphi(t)) = (F \circ \varphi)(t)$.

On sait qu'alors

(28) $\quad \phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,, \; \alpha \leq t \leq \beta$.

On a alors le calcul suivant

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (cf (18))$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \qquad (cf (25))$$

$$= \phi(\beta) - \phi(\alpha) \qquad (cf (27))$$

$$= \int_\alpha^\beta \phi'(t)\,dt \qquad (cf (18))$$

$$= \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \qquad (cf (28))$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \qquad \text{car } F' \equiv f$$

et la relation (26) est démontrée. $\square$

- Si φ est strictement décroissante, la représentation (24) de $x \in [a,b]$ demande d'inverser les valeurs aux bornes de l'intervalle, car on suppose toujours $\alpha < \beta$, on remplace (25) par

(29) $\quad \varphi(\alpha) = b, \; \varphi(\beta) = a$.

alors la formule (26) est quasi inchangée :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

Mais $\varphi'(t) = -|\varphi'(t)|$ car $\varphi'(t) < 0$.

On a alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ |\varphi'(t)|\,dt$$

Nous obtenons une seconde forme de la relation (26)

Prop <u>changement de variable.</u>

Soit $\alpha < \beta$, $a < b$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une bijection monotone qui permet de représenter tout point $x \in [a,b]$ sous la forme (24). On a dans tous les cas

$$(30) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ |\varphi'(t)|\,dt.$$

La relation (30) traite les deux cas de figure (25) et (29). Elle suppose toujours $\alpha < \beta$. C'est la bonne présentation de la formule du changement de variable qui se généralisé aux intégrales doubles.

- **Inégalité triangulaire généralisée**

Soit $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bornée. On a alors

(31) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Cette relation n'a de sens que parce que $a<b$. Elle généralise (par passage à la limite) l'inégalité triangulaire

(32) $$\left|\sum_{j=0}^{N-1} y_j\right| \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|.$$

(20) Démontrer (31) à l'aide de (32) si f est étagée (l'intégrale de f est donnée par la relation (11)).

- Exercices.

* $\int_0^1 x\,dx = ?$ $\quad \int_0^1 x^\alpha\,dx = ?$ $\quad$ Cas où $\alpha = -1$?
* $\int_0^x t \cos t\,dt = ?$
* Reprendre le calcul de $\int_0^x t\cos t\,dt$ en cherchant cette fonction sous la forme $(ax+b)\cos x + (\alpha x+\beta)\sin x$
* Reprendre la même méthode avec l'intégrale $\int_0^x t \sin t\,dt$.
* Soit f continue $[0,1] \to \mathbb{R}$
calculer $u(0)$, $u(1)$, $u''(x)$ pour $u(\cdot)$ définie par
$u(x) = (1-x)\int_0^x y\,f(y)\,dy + x\int_x^1 (1-y)\,f(y)\,dy$.
* calculer $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,x\,dx$.
* Que valent $\int_0^{\pi} \cos^2 t\,dt$ et $\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt$?